前　言

实变函数论是数学的一个重要分支，它在现代数学的各分支中有着广泛而深刻的应用。高等院校的数学专业和其他有关专业都把它作为一门重要的基础理论课。学习这门课的学生，对它的习题求解常感困难。特别是对其中一些较深较难的题目，往往束手无策，望而却步。初教这门课的教师，也为其中一些难题而冥思苦索，花费许多时间和精力。因此，我们认为出一本实变函数论的习题解答是有益的。对学生可以起一个启发引导作用，有助于他们提高解题能力；对教师可以作为一个教学参考材料，有助于他们节省备课时间。

本习题解答是我校部份教师1978年进修实变函数论时，在个人报告集体讨论的过程中形成的。1979年曾整理出一份油印稿。今年又由李仲哲、沙钰、张干宗、王维忠等同志再次加工整理，补充修订。在这次整理中，参阅了复旦大学教学系教师进修班整理的一份题解(油印稿)，吸取了其中某些题的解法。

本习题解答以И·П·那汤松著《实变函数论》(修订本)的习题为主，包括了该书第一至九章全部习题，并补充了一定数量的习题。对有些题还加了附注说明。题解中所用名词、符号除个别（如集合的和、交运算符改用∪、∩）外均与该书一致。文中引用定理、结论时，如无特别声明也均指该书有关章节。

编　者

1980年6月

目　录

第一章　无限集

本章内容　集的运算及其性质，势的概念、可列集与连续统的势及性质，势的比较、集间对等的伯恩斯坦定理。

1. 单调函数的不连续点的全体至多为一可列集，试证之。

证　不妨设函数

$$y=f(x),\ (-\infty<x<+\infty)$$

为单调增加函数。其间断点全体记为E。

对任意$x_0\in E$，$x_1\in E$，$(x_0<x_1)$ 有

$$f(x_0-0)<f(x_0+0)\leqslant f(x_1-0)<f(x_1+0).$$

记　$\delta(x_0)=(f(x_0-0),\ f(x_0+0))$，

$$\delta(x_1)=(f(x_1-0),\ f(x_1+0)).$$

则$\delta(x_0)$和$\delta(x_1)$不相交。

分别在 $\delta(x_0)$、$\delta(x_1)$ 中任意取定有理数r_{x_0}、r_{x_1}。则$r_{x_0}<r_{x_1}$。对每个$x_n\in E$都作$\delta(x_n)$，并选定r_{x_n}。则不同的r_{x_n}对应于不同的x_n。从而E与有理数子集

$$R_E=\{r_{x_n}\mid x_n\in E\}$$

构成一一对应。而R_E至多可列，故E也至多可列。

2. 试作$(0,1)$与$[0,1]$间的一对一的对应。

证　将$(0,1)$中的全部有理数排列为

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots.$$

而[0，1]中全体有理数可排列为

$$0,\ 1,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots.$$

作其间的对应f如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当} x=r_1,\\ 1, & \text{当} x=r_2,\\ r_{n+2}, & \text{当} x=r_n,\ (n>2),\\ x, & \text{当} x \text{是 } (0,\ 1) \text{ 中无理数时}.\end{cases}$$

则$f(x)$是(0，1)与[0，1]间的一一对应。

3．证明$f=2^c$。

证 记

$$F=\{f(x)\,|\,f(x)\text{为}[0,\ 1]\text{上一切实函数}\},$$

$$\overline{\overline{F}}=f.$$

1) $f\geqslant 2^c$。

设E为[0，1]中任一子集，$\varphi_E(x)$为E的特征函数．即

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[0,\ 1]-E.\end{cases}$$

当E_1、E_2均为[0，1]子集，$E_1\neq E_2$时，$\varphi_{E_1}(x)\neq\varphi_{E_2}(x)$。

记

$$M=\{E\,|\,E\subset[0,\ 1]\},$$

$$\Phi=\{\varphi_E(x)\,|\,E\subset[0,\ 1]\}.$$

则Φ与M对等．$\overline{\overline{\Phi}}=\overline{\overline{M}}=2^c$．而$\Phi\subset F$．从而有

$$\overline{\overline{\Phi}}\leqslant\overline{\overline{F}},\ 2^c\leqslant f.$$

2） $f\leqslant 2^c$。

对每一$f(x)\in F$，有平面上一点集

$$C_f=\{(x,\ y)|y=f(x),\ x\in[0,\ 1]\}$$

与之对应．记

$$C_F=\{C_f|\ f(x)\in F\}。$$

则F与C_F对等，$\overline{\overline{C_F}}=\overline{\overline{F}}=f$。$C_F$为平面上一切点集全体$B$的子集，而$B$的势为$2^c$。从而有

$$f=\overline{\overline{C_F}}\leqslant 2^c。$$

由1)、2）立知

$$f=2^c。$$

4． 设$A=B\cup C$，$\overline{\overline{A}}=c$。则$B$与$C$中，至少有一集的势是$c$。

证法一 反证．若不然，$\overline{\overline{B}}<c$，$\overline{\overline{C}}<c$。则可推出矛盾。

由于$\overline{\overline{A}}=c$。必存在$A$到二维欧氏空间$E_2$间的一一对应$\varphi$，使

$$\varphi(A)=E_2。$$

即对任意$a\in A$，有

$$\varphi(a)=(x,\ y)\in E_2$$

与之对应。

若记$\varphi(B)=U$，$\varphi(C)=V$。有

$$E_2=\varphi(A)=\varphi(B)\cup\varphi(C)=U\cup V。$$

且$\overline{\overline{U}}=\overline{\overline{B}}<c$，$\overline{\overline{V}}=\overline{\overline{C}}<c$。

设P_x是E_2中点到x轴X的投影，P_y是E_2中点到y轴Y的投影。

即

$$P_x(x,\ y)=(x,\ 0),\ P_y(x,\ y)=(0,\ y).$$

记　$P_x(U)=U_x,\quad P_y(V)=V_y$。

有　$\overline{\overline{U_x}}\leqslant\overline{\overline{U}}<c,\quad \overline{\overline{V_y}}\leqslant\overline{\overline{V}}<c$。

而$\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}=c$。所以$U_x$、$V_y$分别为$X$、$Y$的真子集。即存在$x^*$，使$(x^*,\ 0)\ \overline{\in}\ U_x$，存在$y^*$使$(0,\ y^*)\ \overline{\in}\ V_y$。从而对任意$y$，$(x^*,y)\ \overline{\in}\ U$，对任意$x$，$(x,\ y^*)\ \overline{\in}\ V$。这使得

$$(x^*,\ y^*)\ \overline{\in}\ U\cup V=E_2.$$

得出矛盾。

证法二　若$\overline{\overline{B}}<c$,证明必有$\overline{\overline{C}}=c$。

由于$\overline{\overline{A}}=c$，存在二维平面$E_2$与$A$间的一一对应$\varphi$，使

$$\varphi(E_2)=A.$$

在平面E_2上，以L_x表示横坐标为x的点的全体。由$\overline{\overline{L_x}}=c$，$\overline{\overline{B}}<c$。知$B$不能与$L_x$上所有点对应，即存在一点$p_x\in L_x$，使$\varphi(p_x)\ \overline{\in}\ B$。从而必有$\varphi(p_x)\in C$。

让x在x轴上变化,每条L_x上取一个这样的点p_x,这些p_x的全体记为P。则P与x轴构成一一对应。便有$\overline{\overline{P}}=c$。而$\varphi(P)\subset C$。则有

$$c=\overline{\overline{P}}=\overline{\overline{\varphi(P)}}\leqslant\overline{\overline{C}}.$$

再由题设知$\overline{\overline{C}}\leqslant\overline{\overline{A}}=c$。立知$\overline{\overline{C}}=c$。

5. 假如$f(x)$具有如下的特性：对于每一个x_0有正数δ与之对应，当$|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\geqslant f(x_0)$；那末$f(x)$的函数值的全体至多成一可列集。

证 由题设知，对任意$x_0 \in (-\infty, \infty)$，可找出有理区间

$$\Delta_{x_0} = (r_{x_0}, R_{x_0})$$

使$x_0 \in \Delta_{x_0}$，$\Delta_{x_0} \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$。从而当$x \in \Delta_{x_0}$时有$f(x) \geqslant f(x_0)$。当$x_0$变动时，记这些有理区间$\Delta_{x_0}$的全体为

$$V = \{\Delta_{x_0} \mid x_0 \in (-\infty, \infty)\}.$$

又设U为由一切有理数对构成的区间(r, R)的全体，即

$$U = \{(r, R)\}.$$

显然，$V \subset U$，而$\overline{\overline{U}} = a$。从而$\overline{\overline{V}} \leqslant a$。

以F记$f(x)$的函数值全体的集合。下面证明F至多可列。

若 $f(x) \equiv c \quad (x \in (-\infty, \infty))$，则问题解决。

若 $f(x_1) \neq f(x_2) \ (x_1 \neq x_2)$，则对应地有$\Delta_{x_1} \in V$，$\Delta_{x_2} \in V$。必有$\Delta_{x_1} \neq \Delta_{x_2}$（即两区间不重合）。若不然，$\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2}$。由$x_2 \in \Delta_{x_1}$，有$f(x_2) \geqslant f(x_1)$，又由$x_1 \in \Delta_{x_2}$，有$f(x_1) \geqslant f(x_2)$。所以有$f(x_1) = f(x_2)$。与假设矛盾。从而必有$\Delta_{x_1} \neq \Delta_{x_2}$。由此可见，$F$中不同的函数值对应于$V$中不同的区间。即$F$与$V$的一个子集对等。从而有

$$\overline{\overline{F}} \leqslant \overline{\overline{V}} \leqslant a.$$

即$f(x)$的函数值全体至多可列。

6. 在被加集可以相交的情形下证明：(1)可列个有限集的和集是一可列集。(2)可列个势为c的集的和集的势仍为c。

证 先说明，我们认为这些定理中所说的诸被加集都是不同的集合。即任意二个集合之间至少有一个元素不同。

证明(1) 设$A_k (k = 1, 2, \cdots)$是可列个(互不相同的)有限

集．记为

$$A_1=\{a_1^{(1)},\ \cdots,\ a_{n_1}^{(1)}\},$$
$$A_2=\{a_1^{(2)},\ \cdots,\ a_{n_2}^{(2)}\},$$
$$\cdots$$

和集为 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。

显然，S 至多可列．因为可按一定顺序把 S 的元素排列起来，去掉重复的，剩下的仍至多可列．

再者，S必为无限集．若不然，S为有限集．不妨记之为

$$S=\{a_1,\ \cdots,\ a_N\}。$$

则S的所有不同子集共有 2^N 个，是有限个，不可能是可列个．因此，S必为无限集．

由于 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为至多可列的无限集，便知S为可列集．

证明(2) 设$S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$E_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$的势均为$c$．为使诸被加集互不相交，置

$$E_1'=E_1,$$
$$E_k'=E_k-(E_1\cup\cdots\cup E_{k-1}),\ (k=2,\ 3,\ \cdots)$$

则 $E_{k_1}'\cap E_{k_2}'=\phi$，$(k_1\neq k_2)$

且仍有

$$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k'。$$

由 $E_1'=E_1$，$\overline{\overline{E_1'}}=\overline{\overline{E_1}}=c$。知$\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{\bigcup\limits_k E_k'}}\geqslant\overline{\overline{E_1'}}=c$。又由于$E_k'\subset E_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$。知$\overline{\overline{E_k'}}\leqslant\overline{\overline{E_k}}=c$。从而知$S=\bigcup\limits_k E_k'$的势不超

过可列个互不相交的势为 c 的集的和集的势．由已证明的结论知$\bar{\bar{S}}\leqslant c$．从而$\bar{\bar{S}}=c$．

7．证明$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，且加以推广．

证 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup C=(A\cap B)\cup C$．

一般有

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup C),(\Lambda\text{为任意指标集}).$$

因为$x\in\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup C\Longleftrightarrow$对一切$\lambda\in\Lambda$有$x\in A_\lambda$或$x\in C\Longleftrightarrow$对一切$\lambda\in\Lambda$有$x\in A_\lambda\cup C\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup C)$．

8．设A_1，A_2，A_3，…为一系列的集，若记$\overline{A}$为这样的元素的全体，有无限多个A_n都含有这种元素．又记$\underline{A}$为这样的元素的全体，只有有限个的A_n不含这种元素．证明

$$\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

证 由$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow$对任意$n$，存在$k_n\geqslant n$，使$x\in A_{k_n}\Longleftrightarrow$对任意$n$，$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$．知

$$\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

同样由 $x\in\underline{A}\Longleftrightarrow$存 在$n$，使$x\in A_k$ $(k\geqslant n)$ $\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$．

知 $\underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$.

［注］ 对某一集合序列$\{A_n\}$，常把$\overline{A}$称为$\{A_n\}$的上限集，记为

$$\overline{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

把$\underline{A}$称为$\{A_n\}$的下限集，记为

$$\underline{A}=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

由已证结果知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

易知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\supset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$.

当 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$时，记之为$\lim_{n\to\infty}A_n$，这时称集列$\{A_n\}$收敛．可以证明单调集列一定收敛．有

若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$，则$\{A_n\}$收敛，且$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$，则$\{A_n\}$收敛，且$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

若$\{A_n\}$为任意集列，引入

$$G_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad F_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

则$G_n \supset G_{n+1}$，$F_n \subset F_{n+1}$。有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} G_n.$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} F_n.$$

9. 如果$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\overline{\overline{A}} = c$，则至少有一个$A_n$的势是$c$。

证 反证。若不然，$\overline{\overline{A_n}} < c$（$n=1, 2\cdots$）。可导致矛盾。

由于$\overline{\overline{A}} = c$，则存在一个$A$到可列维乘积空间

$$B = \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_i\text{为实数}, (i=1, 2, \cdots)\}$$

的一一映照。记为$f(A) = B$。即对任意$a \in A$，对应有$(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in B$使

$$f(a) = (x_1, \cdots, x_n, \cdots).$$

记$f(A_n) = U_n$，$(n=1, 2, \cdots)$。有

$$f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = B.$$

又记 $X_n = \{(0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \mid x_n\text{为实数}\}$ $(n=1, 2, \cdots)$。P_{x_n}为B中点到X_n的投影。即对$(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in B$，

$$P_{x_n}((x_1, \cdots, x_n, \cdots)) = (0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \in X_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

记 $P_{x_n}(U_n) = U_{nx_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$。

即当$(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in U_n$时，$P_{x_n}((x_1, \cdots, x_n, \cdots)) = (0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots) \in U_{nx_n}$。

显然 $U_{nx_n} \subset X_n$，$\overline{\overline{U_{nx_n}}} \leqslant \overline{\overline{U_n}}$。

由于 $\overline{\overline{A_n}}=\overline{\overline{U_n}}<c$ $(n=1, 2, \cdots)$，

有 $\overline{\overline{U_{nx_n}}}\leqslant\overline{\overline{U_n}}<c$ $(n=1, 2, \cdots)$。

而$\overline{\overline{X_n}}=c$。所以$U_{nx_n}$为$X_n$的真子集。即存在$x_n^*$使

$$(0, \cdots, 0, x_n^*, 0, \cdots)\overline{\in}U_{nx_n}(n=1, 2, \cdots).$$

即对任何$x_i(i\neq n)$有

$$(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^*, x_{n+1}, \cdots)\overline{\in}U_n(n=1, 2, \cdots).$$

从而有 $(x_1^*, \cdots, x_n^*, \cdots)\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n=B$。

导出矛盾。

10. 证明任一可列集的所有有限子集全体是可列集。

证 设可列集为

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

对每个n，作出$\{a_1, \cdots, a_n\}$的所有子集，共有有限个。记为

$$B=\{A_1, A_2, \cdots, A_{k_n}\}.$$

再令n取遍所有正整数。则得B_1，B_2，…。从而$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$就是$A$的全体有限子集。显然，$B$是无限集。再根据可列个有限集的和集仍是可列集知$B$是可列集。即$A$的全体有限子集是可列集。

11. 设$\{x_n\}$为一序列，其中元素彼此不同。则它的子序列全体组成势为c的集。

证 记$X=\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$。考虑$X$的子序列，它对应于$X$的一个无限子集$\{x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots\}$ $(k_1<k_2<\cdots<$

$k_n < \cdots$). 因此，只要证明X的无限子集全体的势是c即可。

记X的所有子集全体为A，X的所有有限子集全体为B，X的所有无限子集全体为C。则$A = B \cup C$，而$\overline{\overline{A}} = c$，$\overline{\overline{B}} = a$。由题4的结论立知$\overline{\overline{C}} = c$。

12. 若对任意有限个x：x_1，x_2，$\cdots$，x_n，存在正数M，使得$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right| \leqslant M$成立。试证：能使$f(x) \neq 0$的$x$的集至多为可列集。

证 由题设条件知下面的集合

$$A_a = \{x \mid f(x) > a,\ a > 0\},$$

$$A_b = \{x \mid f(x) < b,\ b < 0\}$$

均为有限集。事实上，若A_a为无限集，可在其中取可列个点x_1，x_2，$\cdots$，x_n，$\cdots$。从而有$f(x_i) > a$ $(i = 1, 2, \cdots)$，$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > na$，当$n \to \infty$时有$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \to \infty$。这与题设条件矛盾。这说明$A_a$必为有限集。同样可证$A_b$亦为有限集。

记 $A = \{x \mid f(x) \neq 0\}$，$A_+ = \{x \mid f(x) > 0\}$，

$$A_- = \{x \mid f(x) < 0\}.$$

则$A = A_+ \cup A_-$。只需证明A_+和A_-均至多可列。

记 $A_1 = \{x \mid f(x) > 1\}$，

$$A_m = \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{m} < f(x) \leqslant \frac{1}{m-1}\right\},\ (m = 2, 3, \cdots)$$

从而 $A_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。

由上面所证知诸A_n均为有限集。从而$A_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$至多为可列集。同样可证$A_-$亦至多可列。所以$A$亦至多可列。

13. 设A_1、A_2是两个互不相交的集，B_1和B_2也是互不相交的集。又设φ_1与φ_2分别是A_1到B_1上，A_2到B_2上的一一映照。则存在$A_1 \cup A_2$到$B_1 \cup B_2$上的一一映照。假如$A_1 \subset A_2$，$B_1 \subset B_2$，φ_1、φ_2意义同前。问是否存在$A_2 - A_1$到$B_2 - B_1$上的一一映照？

解 若$A_1 \cap A_2 = \phi$，$B_1 \cap B_2 = \phi$。可令

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in A_1, \\ \varphi_2(x), & x \in A_2. \end{cases}$$

则$\varphi(x)$就是$A_1 \cup A_2$到$B_1 \cup B_2$上的一个一一映照。

若$A_1 \subset A_2$，$B_1 \subset B_2$。则$A_2 - A_1$与$B_2 - B_1$之间不一定存在一一映照。例如：

$$A_1 = \{2, 3, \cdots\}, B_1 = \{3, 4, \cdots\}.$$

$$A_2 = B_2 = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

$$\varphi_1: n \to n+1, (n = 2, 3, \cdots)$$

$$\varphi_2: n \to n, (n = 1, 2, \cdots)$$

则φ_1是A_1到B_1上的一一映照，φ_2是A_2到B_2上的一一映照。但

$$A_2 - A_1 = \{1\}, B_2 - B_1 = \{1, 2\}.$$

显然$A_2 - A_1$和$B_2 - B_1$之间不存在任何一一映照。

14. 无限集必含有无限多个互不相交的无限真子集。

证 由于无限集必含有可列子集，所以只需对可列无限集

证明即可。

设可列无限集

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}.$$

作A的子集如下：

$$A_1=\{a_n|n=2(2t-1),\ t=1,\ 2,\ \cdots\},$$

$$A_2=\{a_n|n=2^2(2t-1),\ t=1,\ 2,\ \cdots\},$$

……

$$A_k=\{a_n|n=2^k(2t-1),\ t=1,\ 2,\ \cdots\}.$$

……

显然$A_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$是A的真子集。且诸A_k是互不相交的。若不然，当$k_1\neq k_2$时，$A_{k_1}\cap A_{k_2}\neq\phi$。则必有$t_1$，$t_2$使

$$2^{k_1}(2t_1-1)=2^{k_2}(2t_2-1),\ (k_1\neq k_2)$$

不妨设$k_2>k_1$，有

$$2t_1-1=2^{k_2-k_1}\cdot(2t_2-1).$$

这不可能。从而知$\{A_k\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$为A的可列个互不相交的真子集。

15. 证明$[a,\ b]$区间上右方连续单调函数全体的势是c。又$[a,\ b]$上单调函数全体的势如何？

证 (1) $[a,\ b]$上右方连续的单调函数全体的势是c。

记E为右方连续的单调函数全体。任取$f(x)\in E$。作

$$E_1=\{f(x)+c_1|c_1\text{取一切实数}\}$$

显然$\overline{\overline{E_1}}=c$。而$E_1\subset E$。所以$\overline{\overline{E}}\geqslant c$。

另一方面，对任意$f(x)\in E$，对应有$f(x)$在有理点上的函

数值集合

$$a_f=(f(r_1),\ f(r_2),\ \cdots,\ f(r_n),\ \cdots).$$

由 $f(x)$的右连续性，$f(x)$在无理点上的值，完全由a_f所决定。从而a_f完全决定 $f(x)$，E与$\{a_f|f(x)\in E\}$对等。而$\{a_f|f(x)\in E\}$是实数列全体的子集。实数列全体的势是c。则$\{a_f|f(x)\in E\}$的势小于等于c。从而知$\overline{\overline{E}}\leqslant c$。

综上所述便有$\overline{\overline{E}}=c$。

(2) $[a,\ b]$上单调函数全体的势为c。

以F记 $[a,\ b]$ 上单调增加函数全体。它包含右方连续单调增加函数全体。由(1)之结论知后者之势为c，从而知$\overline{\overline{F}}\geqslant c$。

另一方面，对任意$f\in F$，对应有有理点上的函数值

$$(f(r_1),\ f(r_2),\ \cdots,\ f(r_n),\ \cdots).$$

有理点上的函数值还可以决定所有连续点上的函数值和无理数间断点处函数值的左右极限。对于无理数间断点，由题 1 的结论可知它们至多有可列个。排列为（如果间断点有限，取有限个）

$$x_1,\ x_2,\ \cdots x_n,\ \cdots.$$

相应地函数值为

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots.$$

将以下三个数列

$$f(r_1),\ f(r_2),\ \cdots,\ f(r_n),\ \cdots,$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots,$$

排成一个实数列 $a_f=(f(r_1),\ x_1,\ f(x_1),\ f(r_2),\ x_2,\ f(x_2),$

$\cdots$, $f(r_n)$, x_n, $f(x_n)$, $\cdots$)。则F中每一f有一个a_f与之对应，且显然不同的f对应不同的a_f,这样F与全体实数列$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\} \overset{\triangle}{=} R^\infty$的某一个子集对等。由于$\overline{\overline{R^\infty}} = c$ 故 $\overline{\overline{F}} \leqslant c$。

综上所述便有$\overline{\overline{F}} = c$。

16. 设区间$[a, b]$上的实函数列$\{f_n(x)\}$具有极限函数$f(x)$。设$E_n(c)$为区间$[a, b]$上使$f_n(x) > c$的点的全体，$E(c)$为区间$[a, b]$上使$f(x) > c$的点的全体。证明

$$E(c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\left(c + \frac{1}{k}\right).$$

证 一方面，当$x \in E(c)$时，$f(x) > c \Longrightarrow$存在k，使得$f(x) > c + \frac{1}{k}$。即 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) > c + \frac{1}{k}$。$\Longrightarrow$存在$N$,当$n \geqslant N$时$f_n(x) > c + \frac{1}{k}$。$\Longrightarrow x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\left(c + \frac{1}{k}\right) \Longrightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\left(c + \frac{1}{k}\right)$

另一方面，当 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\left(c + \frac{1}{k}\right) \Longrightarrow$ 存在k，使 $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\left(c + \frac{1}{k}\right) \Longrightarrow$存在$N$，当$n \geqslant N$时，$x \in E_n\left(c + \frac{1}{k}\right)$。即 $f_n(x) > c + \frac{1}{k}$，$(n \geqslant N) \Longrightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geqslant c + \frac{1}{k} \Longrightarrow f(x) > c$，$x \in E(c)$。

综上所述便得

$$E(c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\left(c + \frac{1}{k}\right).$$

第二章　点　　集

本章内容　极限点、闭集、开集的概念及其性质；有界开集、有界闭集的结构定理；波雷耳有限复盖定理；点集间距离的定义及有界闭集的隔离性定理；完全集和凝聚点的概念，完全集的势及其结构定理，凝聚点集和完全集的关系．

1． 若$f(x)$为闭区间$[a,b]$上所定义的连续函数，则对于任何实数c，满足$f(x)\geqslant c$的x的全体成一闭集．

证　设$E=\{x\mid f(x)\geqslant c, x\in[a,b]\}$，只要证若$x_0$为$E$的极限点，必有$x_0\in E$．

由x_0为E的极限点，故有点列$x_n\in E(n=1,2,\cdots)$满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

又由于诸$x_n\in E\subset[a,b]$，以及$f(x)$的连续性，从而有

$$f(x_n)\geqslant c,\ x_0\in[a,b],$$

以及
$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant c.$$

这就证明了　$x_0\in E$．

2． 每一个闭集是可列个开集的交集．

证　设F为闭集，作集

$$G_n=\left\{x\mid\rho(x,\ F)<\frac{1}{n}\right\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

其中$\rho(x,F)$表点x到集F的距离。G_n为开集，从而只要证

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n.$$

事实上，由于对任意正整数n有$F\subset G_n$，故有

$$F\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n.$$

另一方面，对任意$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$有

$$0\leqslant\rho(x_0,\ F)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2\cdots),$$

令$n\to\infty$有$\rho(x_0,\ F)=0$。

所以　$x_0\in F$（因F为闭集）。

这就是说　$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\subset F$.

综上所证有　$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$.

3. 证明开区间(a,b)不能表成两两互不相交的可列个闭集的和集.

证法一　用反证法，即若$I_0=(a,b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，其中$\{F_i\}$为两两不交的闭集列，我们想法找到一点$x_0\in(a,b)$，但$x_0\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，从而得出矛盾.

由于$I_0-F_1\neq\phi$，（因为否则I_0为闭集，这不可能），故存在$x_2\in F_j(j\geqslant2)$使

$$\rho(x_2,\ F_1)<\frac{1}{2}(b-a),$$

取$F_{i_1}=F_1$，F_{i_2}为$F_2,F_3,\cdots$中第一个满足上述不等式要求的F_j $(i_2\geqslant 2)$。由隔离性定理存在 $a_1\in F_{i_1},a_2\in F_{i_2}$，使 $\rho(F_{i_1},F_{i_2})=\rho(a_1,b_1)=|b_1-a_1|\leqslant\rho(F_{i_1},x_2)<\frac{1}{2}(b-a)$，显然$a<a_1$、$b_1<b$；记$I_1=(a_1,b_1)$（当$a_1<b_1$）或$I_1=(b_1,a_1)$（当$a_1>b_1$），则有

（i） $I_0\supset\overline{I}_1$，$mI_1=|b_1-a_1|<\frac{1}{2}mI_0$；

（ii） $F_i\cap I_1=\phi(i=1,2,\cdots i_2)$；

（iii） 令$F_j{}^{(1)}\triangleq F_{i_2+j}\cap I_1\ (j=1,2,\cdots)$，再由$a_1,b_1\in F_{i_2+j}$知诸$F_j{}^{(1)}$为互不相交的闭集，且利用(ii)有

$$I_1=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\cap I_1=\bigcup_{j=1}^{\infty}(F_{i_2+j}\cap I_1)$$
$$=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j{}^{(1)}.$$

对I_1重复上述步骤得$I_2=(a_2,b_2)$（或(b_2,a_2)）满足

（i） $I_1\supset\overline{I}_2$，$mI_2<\frac{1}{2}mI_1<\frac{1}{2^2}(b-a)$；

（ii） $I_2\cap F_i{}^{(1)}=\phi(i=1,2,\cdots i_2)$，由此并利用上述结果不难推知$I_2\cap F_j=\phi(j=1,2,3,4)$；

（iii） 作$F_j{}^{(2)}=F^{(1)}_{j_2+j}\cap I_2(j=1,2,\cdots)$，仿上知诸$F_j{}^{(2)}$为互不相交的闭集且满足$I_2=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j{}^{(2)}$。

如此继续下去得一列开区间$I_n=(a_n,b_n)$（或(b_n,a_n)）满足

（i） $I_0\supset\overline{I}_1\supset\cdots\supset\overline{I}_n$，$mI_n<\frac{1}{2}mI_{n-1}<\cdots<\frac{1}{2^n}(b-a)$；

（ii） $I_n\cap F_i=\phi(i=1,2,\cdots,2n)$；

（iii） 诸$F_j{}^{(n)}=F^{(n-1)}_{i_2+j}\cap I_n$为互不相交的闭集，

且 $I_n=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j^{(n)}$。

这样得到的区间列 $\{I_n\}$ 满足$I_0\supset\overline{I}_1\supset\cdots\supset\overline{I}_n\supset\cdots$且 $mI_n\to 0(n\to\infty)$。由区间套定理，存在一点$x^*\in\overline{I}_n$（$n=1, 2, \cdots$）且 $x^*\in I_0=(a,b)$。

下面证明$x^*\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$。若不然$x^*\in\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$,从而存在$i_0$使$x^*\in F_{i_0}$，取$n_0>\left[\frac{i_0}{2}\right]+1$，则由 $\overline{I}_{n_0+1}\cap F_i=\phi$（$i=1, 2, \cdots 2n_0$）知 $\overline{I}_{n_0+1}\cap F_{i_0}=\phi$，所以$x^*\notin\overline{I}_{n_0+1}$，这和$x^*\in\overline{I}_n(n\geqslant 1)$相矛盾，所以$x^*\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$。这就和$(a,b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$的假设相矛盾。

证法二 记$\Delta\triangleq(a,b)$，我们证明下述更强结果：若$\{F_i\}$为含于Δ内的任一组互不相交的闭集列，则 $\Delta-\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$ 的势等于连续统的势c。从而立知不可能有 $\Delta=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，$\{F_i\}$ 为不交闭集列。

取F_1，令$a_0=infF_1$（即F_1的下确界），$b_0=\sup F_1$。由 F_1为闭集，故$a_0,b_0\in F_1$且$a<a_0\leqslant b_0<b$，$I_0\triangleq[a_0,b_0]\supset F_1$。又记 $\Delta_1=(a,a_0)$，$\Delta_2=(b_0,b)$（非空），则有两种情况。

第一种情况：若$\Delta_i\cap\bigcup_{i=2}^{\infty}F_j(i=1,2)$中至少有一个空集，不妨设 $\Delta_1\cap\bigcup_{i=2}^{\infty}F_j=\phi$，而 $\Delta_1\cap F_1\subset\Delta_1\cap I_0=\phi$，所以$\Delta_1\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j=\phi$，$\Delta-\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\supset\Delta_1$，因此$\overline{\overline{\left(\Delta-\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)}}\geqslant\overline{\overline{\Delta_1}}=c$. 问题得证.

第二种情况：$\Delta_i \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j (i=1,2)$均不为空集，对 Δ_i $(i=1,2)$，在$F_2, F_3, \cdots\cdots$中存在最小的下标$n_1^{(i)}$使$F_{n_1^{(i)}} \cap \Delta_i \neq \phi$，显然$n_1 = min\{n_1^{(1)}, n_1^{(2)}\} \geqslant 2$以及$a, a_0, b_0, b \overline{\in} F_{n_1^{(i)}}$，从而$F_{n_1^{(i)}} \cap \Delta_i = F_{n_1^{(i)}} \overline{\cap} \Delta_i$ 为含于开区间 Δ_i内的闭集，对此闭集仿上作出两个闭区间$I_1^{(i)} (i=1,2)$，它们满足：

（ i ） $I_0, I_1^{(1)}, I_1^{(2)}$互不相交；

（ii） $I_0 \cup \bigcup_{i=1}^{2} I_1^{(i)} \supset \bigcup_{i=1}^{n_1} F_i \supset \bigcup_{i=1}^{2} F_i$。

对在Δ中挖去$I_0, I_1^{(1)}, I_1^{(2)}$后余下的四个开区间重复上述步骤，依此类推，用归纳方法假设对第N步作出闭区间$I_N^{(k)} (k=1,2,\cdots,2N)$，它们满足：

（ i ） $I_0, I_n^{(j)} (j=1,2,\cdots,2^n;\ n=1,2,\cdots,N)$互不相交；

（ii） $I_0 \cup \left[\bigcup_{n=1}^{N} \left(\bigcup_{j=1}^{2^n} I_n^{(j)}\right)\right] \supset \bigcup_{i=1}^{n_N} F_i \supset \bigcup_{i=1}^{N+1} F_i$ （因为$n_N \geqslant N+1$）。

在开区间Δ中挖去闭区间$I_0, I_n^{(j)} (j=1,2,\cdots,2^n;\ n=1,2,\cdots,N)$余下的$2^{N+1}$个开区间中，如果至少有一个开区间如 Δ_{i_0}与$\bigcup_{n \geqslant N+2} F_n$的交为空集，从而由(ii) 与$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$的交也为空集，这时

$$\overline{\overline{(a,b) - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}} \geqslant \overline{\overline{\Delta}}_{i_0} = c$$

命题得证。若不然则这2^{N+1}个开区间均与$\bigcup_{n \geqslant N+2} F_n$相交，重复上述步骤得一到列闭区间$\{I_0, I_n^{(i)}\}$，再利用完全集的结构定理可

知它关于$[a,b]$的余集为非空完全集，又在(ii)中令$N\to\infty$有

$$I_0\cup\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{2^n}I_n^{(i)}\right)\right]\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$$

所以集$(a,b)-\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$的势为$c$。

4. 试拓广隔离性定理于无界集。

定理 设F_1,F_2为两个不交的无界闭集，则存在开集G_1，G_2满足$G_1\cap G_2=\phi$，其中$G_1\supset F_1G_2\supset F_2$。

证法一 (1) 对任意$x_1\in F_1$，显然有$r_{x_1}\triangleq\rho(x_1,F_2)>0$，作开集$G_{x_1}=\left\{x\mid\rho(x_1,x)<\dfrac{r_{x_1}}{2}\right\}$，令$G_1=\bigcup\limits_{x_1\in F_1}G_{x_1}$，显见$G_1$为开集，且$G_1\supset F_1$。

(2) 对任意$x_2\in F_2$，与(1)同理可作开集$G_2=\bigcup\limits_{x_2\in F_2}G_{x_1}$，满足$G_2\supset F_2$。

(3) 证明G_1、G_2为所求开集，由(1)(2)知只要证$G_1\cap G_2=\phi$即可。

若不然，有$x\in G_1\cap G_2$，由$x\in G_1=\bigcup\limits_{x_1\in F_1}G_{x_1}$，存在$x_1^0\in F_1$使得$x\in G_{x_1^0}$，同理存在$x_2^0\in F_2$使得$x\in G_{x_2^0}$。所以

$$\rho(x_1^0,x_2^0)\leqslant\rho(x_1^0,x)+\rho(x,\ x_2^0)<\frac{r_{x_1^0}+r_{x_2^0}}{2},$$

但另一方面$\dfrac{1}{2}(r_{x_1^0}+r_{x_2^0})=\dfrac{1}{2}(\rho(x_1^0,F_2)+\rho(x_2^0,F_1))$

$$\leqslant\frac{1}{2}(\rho(x_1^0,x_2^0)+\rho(x_2^0,x_1^0))=\rho(x_1^0,x_2^0)，$$由此引出矛

盾．因此$G_1 \cap G_2 = \phi$。

证法二　令$G_1 = \{x \mid \rho(x, F_1) - \rho(x, F_2) < 0\}$，$G_2 = \{x \mid \rho(x, F_1) - \rho(x, F_2) > 0\}$，则$G_1, G_2$为所求。

事实上，由G_1，G_2的定义知$G_1 \cap G_2 = \phi$，再由$\rho(x, F_i)$为x的连续函数，从而$\rho(x, F_1) - \rho(x, F_2)$为$x$的连续函数，由第一题可知$G_1, G_2$为开集．最后当$x \in F_1$有$\rho(x, F_1) - \rho(x, F_2) = -\rho(x, F_2) < 0$，从而$x \in G_1$，所以$F_1 \subset G_1$；同理$F_2 \subset G_2$。

5．证明用十进位小数表示$[0,1]$中的数时，其用不着数字7的一切数成一完全集。

证　根据数的十进位表示，对$[0, 1]$中任一数x均可表为$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ $(a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}, k = 1, 2, \cdots)$（$x$的这种表示法不一定唯一），而如此表示的级数$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$其值都在$[0,1]$内。

记G表示$[0, 1]$中数的十进位可能表示$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{10^k}$中必有某一个$a_k = 7$的那些数的全体，从而只要证明$G$关于$[0,1]$的余集$p \triangleq [0,1] - G$为完全集。

作开区间　$\delta_0 = \left(\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right)$，

$$\delta_{a_1 \cdots a_n} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{7}{10^{n+1}},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{8}{10^{n+1}}\right)$$

$(n = 1, 2, \cdots)$其中$a_1, \cdots a_n$为不等于7而小于10的非负整数。

显见这些开区间为$[0, 1]$中可数无穷个无公共端点的互不相交的开区间，其内点用十进位数表示时至少有一个$a_n = 7$，而

端点用十进位数表示时可使所有$a_k \neq 7$。作这些开区间的并集记为U，则U为开集且根据完全集的结构定理集U关于[0，1]的余集为一完全集，从而只要证明了$G=U$问题解决。

由U的定义显见$U\subset G$，另一方面，若$x\in G$，从而在x的所有可能的十进位表示$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{10^i}$中均必有一个$a_n=7$，且不妨设此$n$为满足等式的最小整数即$a_1$，…，$a_{n-1}$均不等于7。首先证明下述两种情况不能发生：1° $a_m=0$ $(m=n+1,n+2,\cdots)$，此时x表示区间$\delta_{a_1\cdots a_{n-1}}$的左端点，它有另一十进位表示：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{10^i}+\frac{6}{10^n}+\sum_{i\geqslant n+1}\frac{9}{10^i},$$

在此表示中一切$a_n\neq 7$，因此x不可能这种情况；2° $a_m=7$ $(m=n+1,n+2,\cdots)$，此时x表示$\delta_{a_1\cdots a_{n-1}}$的右端点，它有另一十进位表示

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{10^i}+\frac{8}{10^n}$$

在此表示中一切$a_n\neq 7$，因此x也不可能是这种情况。由此可知$x\in\delta_{a_1\cdots a_{n-1}}\subset U$。综上所证可知$G=U$。这就证明了$P=[0,1]-G$为完全集。

6. 将点集[0,1]表示为c个无共同点的完全集的和集(这里c为连续统的势)。

为证明此命题先证皮亚诺定理。

定理 在区间[0,1]上可选取两个连续函数，使用它们为坐标所表示的曲线：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

填满单位正方形$[0,1]\times[0,1]$.

证 先在$[0,2]$上作函数

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \text{或} \frac{5}{3} \leqslant t \leqslant 2 \\ 3t-1 & \frac{1}{3} < t \leqslant \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} < t \leqslant \frac{4}{3} \\ -3t+5 & \frac{4}{3} < t < \frac{5}{3} \end{cases}$$

再将$g(t)$以2为周期延拓到整个实轴R上即

$$g(t+2) = g(t).$$

从而$g(t)$为R上的连续周期函数，且$0 \leqslant g(t) \leqslant 1$.

定义函数

$$\begin{cases} x(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{g(3^{2n-2}t)}{2^n} \\ y(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{g(3^{2n-1}t)}{2^n} \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

由于$0 \leqslant g(t) \leqslant 1$，可见上述两级数在$R$上一致收敛,从而$x(t)$，$y(t)$有意义且均为连续函数.

记 $G = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [0,1]\}$下面证明:

$$G = [0,1]\times[0,1].$$

显然，对 $t \in [0, 1]$ 有 $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$，$0 \leqslant y(t) \leqslant 1$， 所以$G \subset [0,1]\times[0,1]$.

其次证　$[0,1]\times[0,1]\subset G$即证

对任意$(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$，存在$c\in[0,1]$使得$x(c)=a$，$y(c)=b$。

由于$0\leqslant a\leqslant 1, 0\leqslant b\leqslant 1$，故由$[0,1]$上数的二进位表示有

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n},$$

其中a_n, b_n为0或1$(n=1,2,\cdots)$。

作$c=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$，其中$c_{2n-1}=a_n, c_{2n}=b_n(n=1,2,\cdots)$。因为$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1$，故有$0\leqslant c\leqslant 1$。

下面只要证明：

$$x(c)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(3^{2n-2}c)}{2^n}=a,$$

$$y(c)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(3^{2n-1}c)}{2^n}=b.$$

为此只要证明：$g(3^kc)=c_{k+1}\ (k=0,1,\cdots)$ 因为，这时有$g(3^{2n-2}c)=c_{2n-1}=a_n, g(3^{2n-1}c)=c_{2n}=b_n(n=1,2,\cdots)$，从而

$$x(c)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(3^{2n-2}c)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=a,$$

$$y(c)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(3^{2n-1}c)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}=b.$$

由于$3^kc=2\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{c_n}{3^{n-k}}+2\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^{n-k}}=$偶整数$+d_k$，

其中　$d_k=2\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^{n-k}}$。

利用$g(t)$以2为周期，因此

$$g(3^k c)=g(d_k)。(k=0,1,2,\cdots)。$$

如果$c_{k+1}=0$,有$0\leqslant d_k\leqslant 2\sum\limits_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{3^{n-k}}=\frac{1}{3}$，所以$g(3^k c)=g(d_k)=0=c_{k+1}$。

如果$c_{k+1}=1$,有$\frac{2}{3}\leqslant d_k\leqslant 1$,所以

$$g(3^k c)=g(d_k)=1=c_{k+1}。$$

总之有$g(3^k c)=c_{k+1}(k=0,1,2,\cdots)$。

这样便证明了曲线：

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

填满了单位正方形$[0,1]\times[0,1]$。

下面证明原题：

对任意$a\in[0,1]$，作$E_a=\{t\,|\,x(t)=a,t\in[0,1]\}$,显然，当$a$在$[0,1]$中变化时，这些$E_a$为$c$个互不相交的非空集，且$[0,1]=\bigcup\limits_{a\in[0,1]}E_a$。

由此只要证明E_a为完全集，也就是证明$E_a=E'_a$,这里E'_a为集E_a的导集。

由于$x(t)$为连续函数，所以$E_a=\{t\,|\,x(t)=a\}$为闭集，从而$E'_a\subset E_a$。

下面只要证$E_a\subset E'_a$。

对任意$t\in E_a$，有$x(t)=a,0\leqslant t,a\leqslant 1$,由$[0,1]$中数的二进位与三进位表示有：

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k},\quad t=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{3^j}$$

其中$0\leqslant a_k, c_k\leqslant 1(k=1,2,\cdots)$.

再根据上述推理这两个表示式应满足:

$$a_j=g(3^{2j-2}t)=c_{2j-1}(j=1,2,\cdots).$$

作 $c_{2j-1}^{(n)}=a_j$, $c_{2j}^{(n)}=\begin{cases}c_{2j} & j\neq n\\ \widetilde{c}_{2j} & j=n\end{cases}$ $(j=1,2,\cdots)$

其中$\widetilde{c}_{2j}$取为与c_{2j}不同的数即

$$\widetilde{c}_{2j}=\begin{cases}1 & c_{2j}=0\\ 0 & c_{2j}=1.\end{cases}$$

令 $t_n=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^{(n)}}{3^j}$,

显然 $t_n\to t(n\to\infty)$且$t_n\neq t$, 而

$$x(t_n)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g(3^{2j-2}t_n)}{2^j}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{2j-1}^{(n)}}{2^j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{2^j}=a.$$

由此可见对任意$t\in E_a$,存在$t_n\in E_a, t_n\neq t, t_n\to t(n\to\infty)$,从而$t\in E_a'$. 所以$E_a\subset E_a'$. 综上所述有$E_a=E_a'$, 即 E_a 为完全集.

从而将[0,1]表示为c个互不相交的完全集E_a的和.

7. 证明[0,1]中无理数的全体不可能表示为可列个闭集之和.

证法一 用反证法。若不然，设I为[0,1]中全体无理数点集，存在闭集列$\{F_i\}$使得$I=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，想法找出矛盾。

首先证明上述表示中的F_i必为疏朗集($i=1,2,\cdots$)。因为对任意$x\in F_i$，作x的邻域$U(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$，必有有理数$r\in U(x,\varepsilon)$，$r\overline{\in}F_i$。因$F_i$为闭集，故它的余集$G_i\triangleq(-\infty,+\infty)-F_i$为开集，从而$G_i=\bigcup_k\delta_k^{(i)}$，其中$\delta_k^{(i)}$为$G_i$的构成区间，再由$r\in G_i$知存在$\delta_{k_0}^{(i)}$使$r\in\delta_{k_0}^{(i)}$，取$\delta=U(x,\varepsilon)\cap\delta_{k_0}^{(i)}$为开区间且$\delta\subset U(x,\varepsilon)$，而$\delta\cap F_i\subset G_i\cap F_i=\phi$，这说明$F_i(i=1,2,\cdots)$均为疏朗集。

另一方面[0,1]中全体有理数Q是可列的，故可表为可列个单点闭集$\{r_i\}$之和集，即$Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{r_i\}$。从而闭区间[0，1]就可表为可列个闭的疏朗集的和集，这和本章第16题的结论相矛盾。因此[0,1]中无理数全体不可能表为可列个闭集的和集。

证法二 先证下述命题：

可列个在[0,1]中处处稠密的开集$\{G_i\}$的交集$\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$的势为$c$。

因为G_1为在[0,1]中处处稠密开集，故有$x_1,x_0\in G_1$，$x_0\neq x_1$，且存在开区间$\delta_{i_1}=(a_{i_1}\ b_{i_1})$ ($i_1=0,1$)满足：$x_{i_1}\in\delta_{i_1}$，$\overline{\delta_{i_1}}\subset G_1$，$m\delta_{i_1}<\frac{1}{2}(i_1=0,1)$及$\overline{\delta_0}\cap\overline{\delta_1}=\phi$。又$G_2\cap\delta_{i_1}$为$\delta_{i_1}$中处处稠密开集，故仿上有相异的$x_{i_1 0}$，$x_{i_1 1}\in\delta_{i_1}\cap G_2$及开区间$\delta_{i_1 i_2}=(a_{i_1 i_2},b_{i_1 i_2})(i_2=0,1)$满足：$x_{i_1 i_2}\in\delta_{i_1 i_2}$，$\overline{\delta_{i_1 i_2}}\subset G_2\cap\delta_{i_1}$，$m\delta_{i_1 i_2}<\frac{1}{2^2}$以及$\overline{\delta_{i_1 0}}\cap\overline{\delta_{i_1 1}}=\phi(i_1,i_2=0,1)$。如此继续下去

得开区间列$\delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_n}, b_{i_1 i_2 \cdots i_n})$满足：

$$x_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n}, \quad \overline{\delta}_{i_1 i_2 \cdots i_n} \subset \delta_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} \cap G_n,$$

$$m\delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} < \frac{1}{2^n}, \quad \overline{\delta}_{i_1 \cdots i_{n-1} 0} \cap \overline{\delta}_{i_1 \cdots i_{n-1} 1} = \phi,$$

其中$i_1, i_2, \cdots, i_n = 0, 1$。

在上述作法下，对每一组0,1序列$(i_1, i_2, \cdots, i_n \cdots)$，对应于一组闭区间套$\overline{\delta}_{i_1} \supset \overline{\delta}_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \overline{\delta}_{i_1 \cdots i_n} \supset \cdots$，从而存在唯一点$z_{i_1 i_2 \cdots i_n \cdots} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\delta}_{i_1 \cdots i_n}$，显见对不同的0，1序列$(i_1^1, i_2^1, \cdots, i_n^1, \cdots)$对应不同的点。作集$Z = \{z_{i_1 \cdots i_n \cdots}\}$，易知$\overline{\overline{Z}} = c$。

另一方面，对Z中任一点$Z_{i_1 \cdots i_n \cdots} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\delta}_{i_1 \cdots i_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，所以$Z \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset (0, 1)$。

从而 $c = \overline{\overline{Z}} \leqslant \overline{\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}} \leqslant c$，所以$\overline{\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}} = c$。

下面证明原题，用反证法。若$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$，$F_i$为不含有理数的闭集，所以$F_i$关于$\Delta = (0, 1)$的余集$C_\Delta F_i$为含(0，1)中全体有理数的开集即为(0，1)中处处稠密的开集，因此$(0, 1) - I = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_\Delta F_i$，等式左边为(0，1)中有理数集，其势为$a$，但等式右边由前证明可知其势为$c$，从而得出矛盾，这说明无理数全体不能表为可列个闭集之和。

8. 试在[0，1]上定义一个函数，它在任一有理点不连续，

但在任一无理点连续。

解一 设$\sum_{n=1}^{\infty}C_n$为一收敛正项级数，[0，1]上全体有理数可数，故可记为$Q=\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$

对任意$x\in[0, 1]$，定义函数：

$$f(x)=\sum_{r_n<x}C_n$$

这里和式对$r_n<x$的那些n相应的C_n求和。则$f(x)$为[0，1]上单调增函数且在无理点连续，有理点不连续其跃度为$f(r_{n_0}^+)-f(r_{n_0}^-)=C_{n_0}$。

事实上，因为对任意$y>x$，$f(y)-f(x)=\sum_{x\leqslant r_n<y}C_n\geqslant 0$，所以$f(x)$为增函数。又记$E_{xy}=\{r_n|x\leqslant r_n<y\}$，当$x$为无理数$\lim_{y\to x+}E_{xy}=\phi$，所以$f(x+0)=f(x)$，同样可证$f(x-0)=f(x)$，所以$f(x)$在无理点连续；当$x$为有理点$r_{n_0}$时，有$\lim_{y\to x+}E_{xy}=r_{n_0}$，所以$f(x+0)-f(x)=C_{n_0}$，且此时类似亦可证$f(x-0)=f(x)$ $(x=r_{n_0})$，从而

$$f(r_{n_0}^+)-f(r_{n_0}^-)=C_{n_0}>0$$

解二 利用微积分中熟知的黎曼函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}(p,\ q\text{互素正整数},\ p\geqslant q),\\ 0 & x\text{为}[0,\ 1]\text{中无理点},\end{cases}$$

读者自行证明它亦为所求函数。

9．证明在[0，1]上不可能定义一个如下的函数，它在每

一个有理点连续，而在无理点不连续。

证法一 设 $f(x)$ 为定义在 $[0, 1]$ 上的任一函数，我们定义：

$$\omega(f, J) = \sup_{x \in J} f(x) - \inf_{x \in J} f(x)$$

其中 J 为 $[0, 1]$ 内任一区间，称 $\omega(f, J)$ 为 $f(x)$ 在 J 上的振幅。再定义：

$$\omega(f, a) = \inf \omega(f, J)$$

其中下确界是对含 a 的一切 $[0, 1]$ 内开区间而取的，容易证明 $\omega(f, a) \geqslant 0$ 且等号成立的充分必要条件是 $f(x)$ 在 a 点连续。从而 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内不连续点的全体可表为：

$$E = \{x \mid \omega(f, x) > 0\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \middle| \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}\right\} \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

下面证明 E_n 为闭集即证 $E_n' \subset E_n (n = 1, 2, \cdots)$。

设 x 为 E_n 的任一极限点，我们必须证明 $x \in E_n$，也就是说证明 $\omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}$。为此，只要证明对任一含 x 的开区间 J 有

$\omega(f, J) \geqslant \frac{1}{n}$（这是因为 $\omega(f, x)$ 为所有这样的 $\omega(f, J)$ 的下确界）。事实上，因为开区间 J 含有 E_n 的极限点 x，从而 J 必含有 E_n 的一点 y，这样有

$$\omega(f, J) \geqslant \omega(f, y) \geqslant \frac{1}{n}$$

这就证明了 E_n 为一闭集 $(n = 1, 2, \cdots)$。

最后证明命题。用反证法，若不然，由上证明可知：对于

这样的函数有 $I=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$I$为[0，1]上无理数全体，$E_n$ 为上面定义的闭集．但由第 7 题这是不可能的，故命题得证．

证法二 只要证明对于任何在[0，1]中有理点上连续的函数$f(x)$，至少在一个无理点上连续．

记 (0，1) 中有理点全体 $Q=\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$，又设 $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}(n=1, 2, \cdots)$。取$r_1^* \neq r_1$，$r_1^* \in Q$，$f(x)$在$r_1^*$连续，对$\varepsilon_1$存在$\delta_1>0$，作$I_1=(r_1^*-\delta_1, r_1^*+\delta_1)$使得$r_1 \overline{\in} I_1$，$mI_1<\frac{1}{2}$，$I_1 \subset (0, 1)$，且当$x \in I_1$时有

$$|f(x)-f(r_1^*)|<\varepsilon_1,$$

对I_1可取$r_2^* \in I_1$，$r_2^* \in Q$，但 $r_2^* \neq r_1, r_2, r_1^*$，由$f(x)$在$r_2^*$点连续，故对$\varepsilon_2$存在$I_2=(r_2^*-\delta_2, r_2^*+\delta_2)$使得$r_1, r_2, r_1^* \overline{\in} \overline{I_2}$，$\overline{I_2} \subset I_1$，$mI_2<\frac{1}{2^2}$，且当 $x \in I_2$ 时有

$$|f(x)-f(r_2^*)|<\varepsilon_2$$

显见上述取法是存在的．如此继续下去，到第n步取$r_n^* \in I_{n-1}$，但$r_n^* \in Q$，$r_n^* \neq r_1, \cdots, r_n$及$r_1^*, \cdots, r_{n-1}^*$（由$I_{n-1}$内有无穷多个有理数，故这是可办到的）．再由$f(x)$在$r_n^*$点连续，故对$\varepsilon_n$存在$I_n=(r_n^*-\delta_n, r_n^*+\delta_n)$使得$r_1, \cdots, r_n, r_1^*, \cdots, r_{n-1}^* \overline{\in} \overline{I_n}$，$\overline{I_n} \subset I_{n-1}$，$mI_n<\frac{1}{2^n}$，且当$x \in I_n$时有

$$|f(x)-f(r_n^*)|<\varepsilon_n.$$

如此得到一列闭区间套$(0, 1) \supset \overline{I_1} \supset \cdots \supset \overline{I_n} \supset \cdots$，且 mI_n

$<\frac{1}{2^n}\to 0$（当 $n\to\infty$），由区间套定理存在$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{I}_n$，下面证明$x_0$是无理点且$f(x)$在$x_0$点连续，从而命题得证。

若 x_0 为有理点，则有 $x_0=r_{n_0}$，取 $n\geqslant n_0$，由作法可知 $r_{n_0}\overline{\in}\,\overline{I}_n$，但这与$r_{n_0}=x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{I}_n\subset\overline{I}_n$矛盾，所以$x_0$为无理点。

再证 $f(x)$ 在 x_0 的连续性：任给$\varepsilon>0$，由 $\varepsilon_n\to 0$（$n\to\infty$），取 $\varepsilon_{n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$，由于$\overline{I}_n\subset I_{n-1}$，故 x_0为$\overline{I}_n$的内点，所以 $x_0\in I_{n_0}$，再取 $\delta=\delta_{n_0}-|x_0-r^*_{n_0}|>0$，当$|x-x_0|<\delta$ 时，$|x-r^*_{n_0}|\leqslant|x-x_0|+|x_0-r^*_{n_0}|<\delta_{n_0}$，所以

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &\leqslant |f(x)-f(r^*_{n_0})|+|f(r^*_{n_0})-f(x_0)| \\
&\leqslant 2\varepsilon_{n_0}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就证明了$f(x)$在无理点x_0连续。

10. 证明$f(x)$为$[a,\ b]$上连续函数的充分必要条件是对任意实数 c，集$Z\{x|f(x)\geqslant c\}$和$Z\{x|f(x)\leqslant c\}$常为闭集。

证 必要性由第一题即知。

充分性 若有一点 $x_0\in[a,\ b]$，$f(x)$在x_0点不连续，从而有点列$x_n\to x_0$，$x_n\in[a,\ b]$，使得

$$f(x_n)\geqslant f(x_0)+r>f(x_0)\text{ 或 }f(x_n)\leqslant f(x_0)-r<f(x_0),$$

其中r为某一正常数。

若 $f(x_n)\geqslant f(x_0)+r>f(x_0)$，

取 $c=f(x_0)+r$，

则 $\{x_n\}\subset Z\{x|f(x)\geqslant c\}$

再由$x_n \to x_0$以及$Z\{x|f(x) \geqslant c\}$为闭集可知$x_0 \in Z\{x|f(x) \geqslant c\}$即$f(x_0) \geqslant C$，这和$f(x_0) < f(x_0) + r = C$相矛盾。从而$f(x)$在$x_0$点一定连续。

同理，若$f(x) \leqslant f(x_0) - r < f(x_0)$，将和$Z\{x|f(x) \leqslant c\}$为闭集的假设相矛盾。

11． 假如点集E被开区间集F所复盖，则F中存在可列部分集F^*复盖E。

证 对任意$x \in E$，由假设存在开区间$\Delta_x \in$ F使得$x \in \Delta_x$，因x为Δ_x内点，故有有理数为端点的区间$\delta_x = (r_x, R_x)$使得$x \in \delta_x \subset \Delta_x$。从而区间族$\{\delta_x\}$复盖集$E$。即$E \subset \bigcup_{x \in E} \delta_x$。

另一方面一切以有理数为端点的区间族的个数为可数个，而$\{\delta_x\}$为它的子集族，因此，$\{\delta_x\}$中不同的区间最多为可数个不妨设为δ_1，δ_2，$\cdots\delta_n\cdots$，对每个δ_n至少对应一个Δ_n使$\delta_n \subset \Delta_n \in$ F，对每个n取定一个这样的Δ_n，从而$F^* = \{\Delta_n\}$为F的一个可数子集，且

$$E \subset \bigcup_{x \in E} \delta_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

这就证明了F^*为所求的复盖E的F的可列子集。

12． 证明任何点集的内点全体成一开集。

证 设F°为点集F内点的全体，则证F°为开集。

对任意$x \in F^\circ$，由内点定义，存在x的邻域$I_x = (\alpha_x, \beta_x) \subset F$，作集$G = \bigcup_{x \in F^\circ} I_x$，显见$G$为开集，且$F^\circ \subset G$。另一方面，对任

意$y\in G$，存在I_{x_0}使得$y\in I_{x_0}\subset F$，所以y为F内点即 $y\in F^{\circ}$，也就是说$G\subset F^{\circ}$。综上有$F^{\circ}=G$，G为开集，从而F°为开集。

13. 证明在n维空间中任意一个开集G均可表成$G=\bigcup_{i\geq 1} I_n^{(i)}$（和式为有限或可数无穷），其中 $I_n^{(i)}=\{x=(x_1, \cdots, x_n) \mid c_j^{(i)}\leqslant x_j< d_j^{(i)} (j=1, 2, \cdots, n)\}$ 且互不相交。称 $I_n^{(i)}$为 n 维空间中的半开闭长方体。

证 仅就$n=2$的情形加以证明，一般 n 维空间的情形类似可证。

(1) 用两族平行直线

$$x=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots; \ y=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots$$

将平面分成可数个互不相交的边长为 1 的半开闭正方形 $\{I_{1k}\}$，我们取其中完全含于G的半开闭正方形，记为$\{U_{1j}\}$，显然它们是互不相交的，且至多为可列个。若这样的U_{1j} 不存在取为空集。

(2) 再作直线族

$$x=\frac{i}{2}, \ y=\frac{j}{2} \ (i, \ j=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots)$$

将整个平面又划成了可列个边长为$\frac{1}{2}$的互不相交的半开闭正方形$\{I_{2k}\}$，显然I_{2k}必含于某个I_{1m}中，我们再在$\{I_{2k}\}$中取出含于G中，而不在$\{U_{1j}\}$中的正方形，记为$\{U_{2j}\}$，它最多也为可列个互不相交正方形且与$\{U_{1j}\}$互不相交。

(3) 依此类推，我们作两直线族

$$x=\frac{i}{2^n},\ y=\frac{j}{2^n}\ (i,\ j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

这样得到可列个互不相交的半开闭正方形 $\{I_{n,k}\}$ 从其中选出含于G中而不在$\{U_{ij}\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 中的正方形，记为$\{U_{nj}\}$，显然$\{U_{nj}\}$最多可数，且与$\{U_{ij}\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$均不相交。

上述所作$\{U_{nj}\}$的全体，每一个均为含于G中的半开闭正方形且互不相交，其个数最多为可数个。从而可将它们记为$\{I_2^{(j)}\}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，这里m可为有穷或可数无穷)。

(4) 证明 $G=\bigcup\limits_{j=1}^{m}I_2^{(j)}$。

因为诸 $I_2^{(j)}\subset G$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,m)$，显然$\bigcup\limits_{j=1}^{m}I_2^{(j)}\subset G$。另一方面，对任意点$(x,\ y)\in G$，由于 G 为开集，从而对上述所作半开闭正方形列 $\{I_{nj}\}$，当 n 充分大时，必有某一 I_{nj}使$(x,\ y)\in I_{nj}\subset G$，由是取满足此性质的最小正整数 n_0，则此时对应的$I_{n_0j_0}$必为$\{U_{n_0j}\}$中的一个，从而有

$$(x,\ y)\in U_{n_0j_0}\subset\bigcup_{j=1}^{m}I_2^{(j)}.$$

所以 $G\subset\bigcup\limits_{j=1}^{m}I_2^{(j)}$。这样便有$G=\bigcup\limits_{j=1}^{m}I_2^{(j)}$。

14. 记$A'=A^{(1)}$，$(A^{(1)})'=A^{(2)}$，$\cdots(A^{(n-1)})'=A^{(n)}$，$\cdots$，试作一集$A$，使$A^{(n)}(n=1,\ 2,\ \cdots)$彼此互异。

解 作集 $E_1=\left\{\frac{1}{n_1},\ n_1=1,\ 2,\ \cdots\right\}$，

$$E_2=\left\{1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2};\ n_1,\ n_2=2,\ 3,\ \cdots\right\}$$

$\cdots$

$$E_k=\ \{k-1+\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k};\ n_1\cdots,\ n_k=k,\ k+1\cdots\}$$

$\cdots$

作集 $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$，下证$A$为所求。

因为 $E_k'=\{k-1\}\cup\left\{k-1+\frac{1}{n_1};\ n_1=k,\ k+1,\ \cdots\right\}\cup\cdots$

$$\cup\left\{k-1+\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_{k-1}};\ n_1,\ \cdots,\ n_{k-1}=k,\ k+1,\cdots\right\}$$

$$E_k''=\{k-1\}\cup\cdots\cup\left\{k-1+\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_{k-2}};\ n_1,\ \cdots,\ n_{k-2}=k,\ k+1,\ \cdots\right\}$$

$\cdots$

$E_k^{(k)}=\{k-1\}$

$E_k^{(n)}=\phi$，当$n>k$。

上式对$k=1,\ 2,\ \cdots$均成立。且对$E_k^{(j)}$ ($j=1,\ 2,\ \cdots$)中的每一个元素都满足大于或等于$k-1$，而小于或等于$k-1+\frac{k-1}{k}$，从而小于k，这样便有

$$1,\ 2,\ \cdots,\ k-1\overline{\in}\left(\bigcup_{j\geq k+1}E_j\right)^{(n)}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\qquad (*)$$

因为右边和式中的元素都$\geq k$。所以

$$A^{(1)}=A'=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k\geqslant 2}E_k\right)^{(1)},$$

$$A^{(2)}=(A')'=\{1\}\cup\left(\bigcup_{k\geqslant 3}E_k\right)^{(2)},$$

…

$$A^{(n)}=\{n-1\}\cup\left(\bigcup_{k\geqslant n+1}E_k\right)^{(n)},$$

…

再利用(*)可知 $k-1\overline{\in}A^{(n)}(n\geqslant k+1)$，而$k-1\in E_k^{(k)}\subset A^{(k-1)}$。所以$A^{(1)}$，$A^{(2)}$，…，$A^{(n)}$，…中任意两集都互异，事实上，任取两集$A^{(i)}$，$A^{(j)}(i\neq j)$，不妨设$i<j$，从而$i-1\in A^{(i)}$，但$i-1\overline{\in}A^{(j)}$。

15．设 $\{O_n\}$ 为闭区间 $[a,b]$ 中处处稠密的开集，证明：$\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$为 $[a,b]$中处处稠密集。

证 只要证明$[a,b]$中任一开区间 $I_0=(\alpha,\beta)$ 中总有点 $x^*\in\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$

由O_1为$[a,b]$中处处稠密开集，故$O_1\cap I_0\neq\phi$，且它为开集，故有区间I_1满足 $\overline{I}_1\subset O_1\cap I_0\subset I_0$，对$I_1$重复上述步骤得开区间$I_2$满足$\overline{I}_2\subset O_2\cap I_1\subset I_1$，如此继续下去得一列开区间$\{I_n\}$满足，

$$\overline{I}_n\subset O_n\cap I_{n-1}\subset I_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

利用微积分中区间套定理至少存在一点$x^*\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{I}_n$（这里 因 不

一定要求 $mI_n \to 0$，故点 x^* 不一定唯一）。所以 $x^* \in \bar{I}_n \subset O_n \cap I_{n-1} \subset O_n \cap I_0$（$n=1, 2, \cdots$）所以 $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \cap I_0 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$。这就证明了集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 在 $[a,b]$ 中处处稠密。

16. 证明任何闭区间不可能表为可列个疏朗集的和集。

证 用反证法。若闭区间 $[a,b]=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$，其中 F_i（$i=1,2,\cdots$）为疏朗集，则导出矛盾。

由于 F_1 为疏朗集，在 $[a,b]$ 中必有闭区间 $\bar{I}_1$ 使得 $\bar{I}_1 \cap F_1=\phi$。同样，由于 F_2 在 $[a,b]$ 中从而在 $\bar{I}_1$ 中疏朗，因此有闭区间 $\bar{I}_2$ 使得 $\bar{I}_2 \subset \bar{I}_1$ 以及 $\bar{I}_2 \cap F_2=\phi$，当然也有 $\bar{I}_2 \cap F_1=\phi$。继续这样作下去得到闭区间列 $\{\bar{I}_n\}$ 满足：

$$\bar{I}_n \subset \bar{I}_{n-1}, \quad \bar{I}_n \cap F_i=\phi \quad (i=1, 2, \cdots, n;\ n=1, 2, \cdots)$$

由闭区间套定理的证明可知对 $\{\bar{I}_n\}$ 存在一点 x^*（不一定唯一）满足

$$x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n \subset [a,b], \quad x^* \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i=[a,b].$$

这就导出了一个矛盾。因此闭区间 $[a,b]$ 不可能表为可列个疏朗集的和。

17. 设 $f(x)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的连续函数，作函数列 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$，（$n=1, 2, \cdots$；$f_0(t)=f(t)$）。证明：(i) 若存在

与 x 无关常数 $n\geqslant1$，对一切 $x\in[0,1]$ 有 $f_n(x)\equiv0$，则 $f(x)\equiv0$ 对一切 $x\in[0,1]$；(ii)若对 $[0,1]$ 中每一 x，总存在 $n(x)\geqslant1$ 使得 $f_{n(x)}(x)=0$，则 $f(x)\equiv0$，对一切 $x\in[0,1]$ 成立。

证法一 (i) 由于 $f(x)$ 连续，故 $f_n(x)(n\geqslant1)$ 连续可导且 $f_n'(x)=f_{n-1}(x)$，从而若 $f_n(x)\equiv0$，则有 $f_{n-1}(x)\equiv f_n'(x)\equiv0$，如此继续下去可得：$f(x)\equiv f_0(x)\equiv f_n^{(n)}(x)\equiv0$，$x\in[0,1]$。

(ii) 记 $E_0=\{x\mid f(x)=0,\ x\in[0,1]\}$。由于 $f(x)$ 的连续性，只要证 E_0 在 $[0,1]$ 中处处稠密即可。因为，若此成立，对任意 $x\in[0,1]$，在 E_0 中存在 $x_n\in E_0$ 使得 $x_n\to x$，再由连续性有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$。

为证 E_0 在 $[0,1]$ 中稠密，只要证对于 $[0,1]$ 中任一区间 (α,β) 内都含有 E_0 中的点。

自 $f(x)$ 的连续性，易知 $E_0=\{x\mid f(x)=0,\ x\in[0,1]\}$ 为闭集，同理 $E_n=\{x\mid f_n(x)=0,x\in[0,1]\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 均为闭集，又由假设条件 $[0,1]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，从而 $[\alpha,\beta]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(E_n\cap[\alpha,\beta]\right)\overset{\Delta}{=}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，$\left\{\widetilde{E}_n\right\}$ 为一列闭集。由第16题知：至少有一个闭集 $\widetilde{E}_{n_0}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内不疏朗，也即存在开区间 $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$ 使得 $\widetilde{E}_{n_0}$ 在 (α_1,β_1) 内稠密，这就是说在 (α_1,β_1) 的一个稠密集上有 $f_{n_0}(x)=0$，从而在 (α_1,β_1) 上恒有 $f_{n_0}(x)\equiv0$，再由(i)知在 (α_1,β_1) 上恒有 $f(x)\equiv0$。所以在 (α,β) 内至少有一点使得 $f(x)=0$。这说明 E_0 在 $[0,1]$ 内处处稠密。

证法二 用反证法。若有一点 x_0 使得 $f(x_0)\neq0$，不妨设

$f(x_0)>0$,由连续性有$I_0=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，当$x\in\bar{I}_0$时$f(x)>0$，从而$f_1(x)$在$\bar{I}_0$上不恒为0，故至少有一点$x_1\in I_0$使$f_1(x_1)\neq 0$，再由$f_1(x)$的连续性，存在$x_1$的邻域$\bar{I}_1=[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]\subset I_0$使得对一切$x\in\bar{I}_1$恒有$f_i(x)\neq 0(i=0, 1)$，如此继续下去重复上述步骤得区间列$\{I_n\}$满足$\bar{I}_n\subset I_{n-1}$，在$\bar{I}_n$上$f_i(x)\neq 0\,(i=0, 1, 2, \cdots, n)$。从而$\{\bar{I}_n\}$为一列闭区间套，由区间套定理至少存在一点$x^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bar{I}_n\subset[0, 1]$，对任一整数$n$，由于$x^*\in\bar{I}_n$，所以有$f_n(x^*)\neq 0$。但这和假设条件相矛盾。

18．设A，B为非空不交闭集（不一定有界），试作在实轴R上连续函数$f(x)$满足：$0\leqslant f(x)\leqslant 1$且当$x\in A$,$f(x)=0$,当$x\in B$,$f(x)=1$。

解 记$\rho(x, A)$为点x到集A的距离，则$\rho(x, A)\geqslant 0$且等号当且仅当$x\in A$成立。作函数

$$f(x)=\frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A)+\rho(x, B)}, \quad x\in(-\infty, +\infty),$$

首先证$\rho(x, A)+\rho(x, B)>0$，从而$f(x)$有意义。事实上，若不然有$\rho(x, A)+\rho(x, B)=0$，所以$\rho(x, A)=\rho(x, B)=0$，又由A，B为闭集可知$x\in A\cap B$。这说明$A\cap B\neq\phi$，这和假设相矛盾。

其次证$\rho(x, A)$是x的连续函数。事实上，对任意x_0有$\rho(x_0, A)\leqslant|x_0-x|+\rho(x, A)$及$\rho(x, A)\leqslant|x-x_0|+\rho(x_0, A)$；所以$|\rho(x, A)-\rho(x_0, A)|\leqslant|x-x_0|$，这说明$\rho(x, A)$为$x$的连

续函数。

由上可知$f(x)$的分母$\rho(x, A)+\rho(x, B)$为非零连续函数，从而$f(x)$为x的连续函数。

最后证$f(x)$满足所要求的性质，这是显然的。

〔注〕 上述结果可推广到n个不交闭集的情形。设A_1，A_2，…，A_n为n个互不相交的闭集，可作一连续函数$f(x)$使得当$x\in A_k$时$f(x)=C_k$（C_k为常数，$k=1, 2, \cdots n$）。事实上，作函数

$$f(x)=\begin{cases}C_k, & x\in A_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i/\rho(x,\ A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1/\rho(x,\ A_i)}, & x\overline{\in}\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\end{cases}$$

即可。

19. 设集列$\{A_n\}$为一非空的闭集套即$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$且满足$\rho(A_n)\triangleq\sup\limits_{x,y\in A_n}|x-y|\to 0\ (n\to\infty)$，试证明交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$非空且仅含唯一点$x$。

证 由A_n非空，取$x_n\in A_n(n=1, 2, \cdots)$，则$\{x_n\}$为柯西基本收敛点列。事实上，由于$A_n\supset A_{n+1}$，所以$x_{n+m}\in A_{n+m}\subset A_n(m=0, 1, 2, \cdots)$。从而

$$|x_{n+m}-x_n|\leqslant\sup_{x,y\in A_n}|x-y|=\rho(A_n)\to 0(n\to\infty),$$

由极限存在的柯西准则知存在唯一点x使得$x_n\to x(n\to\infty)$。又由

A_n为闭集立知$x\in A_n$，从而$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。存在性得证。

唯一性：

若另有$y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，所以$x$，$y\in A_n(n=1, 2, \cdots)$，$|x-y|\leqslant\rho(A_n)\to 0$，所以$y=x$，这就证明了唯一性。

20. 设$g(x)$为$[a, b]$上连续函数，又记$E=\{x|x\in[a, b]$，存在$t>x$使$g(t)>g(x)\}$。证明E为开集且若(a_k, b_k)为E的构成区间，则有$g(a_k)\leqslant g(b_k)$。

证 若E为空集，问题得证。

若$E\neq\phi$，对任意$x_0\in E$，存在$t>x_0$，使得$g(t)>g(x_0)$，因为$g(x)$在x_0点连续，故存在x_0的某一邻域，当x在此邻域内变化，且$t>x$时有$g(t)>g(x)$成立，故$x\in E$，从而E为开集，E可表为构成区间的和集即$E=\bigcup\limits_{k}(a_k, b_k)$

下面证 $g(a_k)\leqslant g(b_k)$。

设$x_0\in(a_k, b_k)$，由于$g(x)$在$[x_0, b]$上连续，故存在一点$x_1\in[x_0, b]$使$g(x_1)$为$g(x)$在$[x_0, b]$上的极大值，显见$x_1\overline{\in}E$，因为否则有$t>x_1$使$g(t)>g(x_1)$，这和$g(x_1)$为最大值的假设相矛盾。又由$(x_0, b_k)\subset E$，所以$b_k\leqslant x_1\leqslant b$，但由$b_k\overline{\in}E$知不能有$g(b_k)<g(x_1)$，于是$g(b_k)\geqslant g(x_1)$，再因$g(x_1)$为$g(x)$在$[x_0, b]$上的最大值，故必有$g(b_k)=g(x_1)$，因此对任意$x_0\in(a_k, b_k)$，有$g(x_0)\leqslant g(b_k)$。令$x_0\to a_k^+$，利用$g(x)$的连续性有$g(a_k)\leqslant g(b_k)$。命题得证。

21. 设$C[0, 1]$为定义在$[0, 1]$上所有连续函数集合，对对$C[0, 1]$中任意两函数$x(t)$，$y(t)$，定义距离：

$$\rho(x, y)=\max_{0\leq t\leq 1}|x(t)-y(t)|.$$

在此距离意义下，可在$C[0, 1]$内类似点集引入极限点和闭集概念。对点集$B\subset[0, 1]$，作$C[0, 1]$中子集

$$F=\{x(t)|x(t)\in C[0, 1]，当t\in B时x(t)=0\},$$

$$E=\{x(t)|x(t)\in C[0,1],当t\in B时|x(t)|<a, a>0\}.$$

证明：(i) F为闭集；(ii) E为开集的充分必要条件是B为闭集。

证 (i) 即证若有$x_n(t)\in F$，且$\rho(x_n, x)\to 0$ $(n\to\infty)$，则有$x(t)\in F$。

事实上，由$x_n(t)\in F$知当$t\in B$时$x_n(t)=0(n=1, 2, \cdots)$，又由$\rho(x_n, x)=\max\limits_{0\leq t\leq 1}\{|x_n(t)-x(t)|\}\to 0$可知$x_n(t)$在$[0, 1]$上从而也在$B$上一致收敛于$x(t)$，所以$x(t)\in C[0, 1]$，且当$t\in B$时$x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=0$。这说明$x(t)\in F$即证明了$F$为$C[0, 1]$中闭子集。

(ii) 先证充分性：对任意连续函数$x_0(t)\in E$，因B为闭集，故存在一点$t_0\in B$使得$|x_0(t_0)|=\max\limits_{t\in B}(|x_0(t)|)<a$，记

$$r=a-|x_0(t_0)|>0,$$

作函数$x_0(t)$的邻域：

$$U(x_0, r)=\{x|\rho(x_0, x)<r, x\in C[0, 1]\}$$

当$x\in U(x_0, r)$，$t\in B$时

$$|x(t)|\leqslant\max_{t\in B}|x(t)-x_0(t)|+\max_{t\in B}|x_0(t)|<r+$$

$$+|x_0(t_0)|=a,$$

所以，存在x_0的邻域$U(x_0, r)\subset E$，故E为开集。

其次证必要性：用反证法。若B不是闭集，则至少存在一点$t_0\overline{\in}B$，但有$t_n\in B$使得$t_n\to t_0(n\to\infty)$，这里t_n，t_0均$\in[0,1]$，不妨设$t_0\in(0, 1)$（端点情形同样考虑）。作连续函数

$$x_0(t)=\begin{cases}\dfrac{at}{t_0}, & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ a\dfrac{1-t}{1-t_0}, & t_0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

显然$x_0(t)\in C[0, 1]$，且当$t\neq t_0$时$|x_0(t)|<a$，而$t_0\overline{\in}B$，故当$t\in B$有$|x_0(t)|<a$，这说明$x_0(t)\in E$。但对$x_0(t)$的任意邻域$U(x_0, r)=\{x\,|\rho(x, x_0)<r, x\in C[0, 1]\}$取

$$x(t)=x_0(t)+\frac{r}{2},$$

显见$x(t)\in U(x_0, r)$，但这时

$$x(t_0)=a+\frac{r}{2}>a,$$

再由于$x(t)$是$[0, 1]$上连续函数，故存在t_0的充分小邻域I_{t_0}，使得当$t\in I_{t_0}$时，$x(t)>a$，而t_0为B的极限点，故在I_{t_0}中至少有一点$t'\in B$使$x(t')>a$，从而$x(t)\overline{\in}E$，这说明E不是开集，得出矛盾。

第三章 可测集

本章内容 直线上有界点集的勒贝格可测及测度的概念，可测集的性质及类型；可测性及测度对于运动的不变性；较难与较易的测度问题；维他利复盖定理。

1．每一个非空完全集必含有一个测度为零的非空完全子集．

证法一 设C为非空完全集．若$mC=0$，则结论自然成立．下设$mC=a>0$．

先指出如下结论：

非空完全集C的每一点均为C的凝点．

事实上，任取一点$x_0\in C$，并任取含x_0的一个区间δ，由于x_0是C的极限点，δ中必有另一点$x_1\in C$，并可作出两个区间$\delta_{i_1}(i=0,1)$，使

$$x_{i_1}\in\delta_{i_1},\ \delta_{i_1}\subset\delta,\ m\delta_{i_1}<\frac{m\delta}{2},\ \overline{\delta}_0\cap\overline{\delta}_1\subset\phi.$$

同理，又可在$\delta_{i_1}(i=0,1)$中取出相异两点x_{i_10}，$x_{i_11}\in C$，并相应地作出区间$\delta_{i_1i_2}(i_2=0,1)$，使满足

$$x_{i_1i_2}\in\delta_{i_1i_2},\ \delta_{i_1i_2}\subset\delta_{i_1},\ m\delta_{i_1i_2}<\frac{m\delta}{2^2},$$

$$\overline{\delta}_{i_1i_2}\cap\overline{\delta}_{i'_1i'_2}=\phi((i_1,i_2)\neq(i'_1,i'_2)).$$

这种手续一直进行下去，便可得点集$S=\{x_{i_1i_2\cdots i_n\cdots}\}$其中

$$x_{i_1 i_2 \cdots i_n \cdots} \in \overline{\delta_{i_1}} \cap \overline{\delta_{i_1 i_2}} \cap \cdots \overline{\delta_{i_1 \cdots i_n}} \cap \cdots \qquad (i_k = 0,\ 1)$$

易知，$S \subset C \cap \delta$，且$\overline{\overline{S}} = C$，从而知$x_0$为$C$的凝点。

下证C含有测度为零的非空完全子集。

如能构造一个测度为 0 的不可列闭集$E \subset C$，则 $E = P \cup D$，P为非空完全集。又$P \subset E \subset C$，所以$mP \leqslant mE = 0$，即 $mP = 0$。于是P即合所求。

下面就来构造这样的集E。

在C中任取两个不同的点x_0，x_1，作两个小区间δ_0，δ_1，使得$x_0 \in \delta_0$，$x_1 \in \delta_1$，且

$$m\delta_0 \leqslant \frac{a}{2^2},\quad m\delta_1 \leqslant \frac{a}{2^2},\ \overline{\delta_0} \cap \overline{\delta_1} = \phi.$$

由x_0，x_1均为C的凝点，可知$C \cap \overline{\delta_0}$与$C \cap \delta_1$均为不可列闭集，记其凝点全体分别为$P_1$，$P_2$，易知$P_{i_1}$($i_1 = 0,1$)为非空完全集且

$$P_{i_1} \subset C,\ mP_{i_1} \leqslant \frac{a}{2^2},\ P_0 \cap P_1 = \phi.$$

对每个P_{i_1}施行同样的手续，得出四个完全集$P_{i_1 i_2}$($i_1 = 0,1$；$i_2 = 0$，1)，满足

$$P_{i_1 i_2} \subset P_{i_1},\quad mP_{i_1 i_2} \leqslant \frac{a}{2^4},\ P_{i_1 0} \cap P_{i_1 1} = \phi.$$

再对每个$P_{i_1 i_2}$施行同样的手续。如此一直做下去，得到一列完全集：

$$P_{i_1}\ (2^1\text{个}),\ P_{i_1 i_2}\ (2^2\text{个}),\ \cdots,\ P_{i_1 \cdots i_n}\ (2^n\text{个}),\ \cdots$$

满足

$$P_{i_1 \cdots i_n} \subset P_{i_1 \cdots i_{n-1}} \subset C,\ mP_{i_1 \cdots i_n} \leqslant \frac{a}{2^{2n}},$$

$$P_{i_1\cdots i_n}\cap P_{i_1'\cdots i_n'}=\phi$$（至少有一个i_k与i_k'不同）。

令 $P^{(1)}=\bigcup_{(i_1)}P_{i_1}$，$P^{(2)}=\bigcup_{(i_1,i_2)}P_{i_1i_2}$，…，

$$P^{(n)}=\bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)}P_{i_1\cdots i_n}\text{，}\cdots$$

易知 $P^{(1)}\supset P^{(2)}\supset\cdots\supset P^{(n)}\supset\cdots$，

$$mP^{(n)}\leqslant 2^n\cdot\frac{a}{2^{2n}}=\frac{a}{2^n}(n=1,\ 2,\ \cdots)\text{。}$$

再令 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}P^{(n)}$。

则E就是我们要构造的集合。因为

$$E\subset P^{(n)}\subset C\text{。}$$

$$mE=\lim_{n\to\infty}mP^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2^n}=0\text{。}$$

又由$P^{(n)}$均为闭集，知E为闭集。再因每一个 0—1 序列（i_1，i_2，…，i_n，…）所对应的完全集列：

$$P_{i_1}\supset P_{i_1i_2}\supset\cdots\supset P_{i_1\cdots i_n}\supset\cdots$$

决定一点，记为$z_{i_1\cdots i_n\cdots}$。易知E即由所有这种点所组成，即

$$E=\left\{z_{i_1\cdots i_n\cdots}\ \middle|\ \begin{array}{l} z_{i_1\cdots i_n\cdots}\in P_{i_1}\cap P_{i_1i_2}\cap\cdots\cap P_{i_1\cdots i_n}\cap\cdots \\ i_k=0,\ 1\text{。}(k=1,\ \cdots,\ n\cdots)\end{array}\right\}$$

由此可知E的势为C。

再记E的凝点全体为P，则P即为所求的非空零测完全子集。

2．设A是一个具有正测度的可测集，则A中必有两点x与

y，此两点间的距离为一有理数。

证法一 对A中点进行分类，x_1，$x_2 \in A$，若$x_1 - x_2$为有理数，则x_1于x_2属同一类。否则不属同一类。这样A中所有点被分为许多互不相交的类$K(x_1)$，$K(x_2)$，…。在每一类中任选一个点作为代表，组成集合B，$B \subset A$，且B为不可测集。

若A中任二点x，y之差均不为有理数，即A中任二点必属不同类，亦即每类$K(x)$只含一个点，$K(x) = \{x\}$。于是$B = A$。而B不可测，此与A可测的假设相矛盾。因此，A中至少有两点，其差为有理数。

证法二 不妨设$A \subset [-N, N]$，$N > 0$。

将$[-1, 1]$中所有有理数排列为：

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$$

作运动$\varphi_n(x) = x + r_n$，记$\varphi_n(A) = A_n (n = 1, 2, \cdots)$。由可测性及测度对于运动的不变性，

$$mA_n = mA > 0 \quad (n = 1, 2 \cdots).$$

易知$A_n \subset [-N-1, N+1]$，从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [-N-1, N+1]$$

假若对任何n，$m (n \neq m)$均有$A_n \cap A_m = \phi$，则有

$$2(N+1) \geqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} mA_n = mA + mA + \cdots$$

此与$mA > 0$相矛盾。故必有n_0，$m_0 (n_0 \neq m_0)$使$A_{n_0} \cap A_{m_0} \neq \phi$。设$z \in A_{n_0} \cap A_{m_0}$，则有$x_0$，$y_0 \in A$，使

$$z = x_0 + r_{n_0} = y_0 + r_{m_0},$$

从而$x_0-y_0=r_{m_0}-r_{n_0}$为有理数。

3． 有界集E为可测的必要且充分的条件是：对任一正数ε，存在着一个闭集$F\subset E$，使$m^*(E-F)<\varepsilon$。（瓦来—布普的检验法）

证 必要性．有界集E可测，则$mE=m_*E$．由内测度的定义，对任何$\varepsilon>0$，存在闭集$F\subset E$，使$mF>mE-\varepsilon$，从而有$m(E-F)<\varepsilon$，亦即$m^*(E-F)<\varepsilon$。

充分性．已知对任一$\varepsilon>0$，有闭集$F\subset E$，使得

$m^*(E-F)<\varepsilon$．由

$$E=F\cup(E-F),\quad F\cap(E-F)=\phi,$$

$$m^*E\leqslant m^*F+m^*(E-F)<mF+\varepsilon\leqslant m_*E+\varepsilon,$$

即知 $0\leqslant m^*E-m_*E<\varepsilon$。

再由ε的任意性，即得$m^*E=m_*E$．即知E为可测集。

［注］类似的有如下结论：

有界集E可测的充要条件是：对任一$\varepsilon>0$，恒有开集$G\supset E$，使$m^*(G-E)<\varepsilon$。

证 必要性易知．下证充分性．

由假设条件，对任一自然数n，有开集$G_n\supset E$，使

$m^*(G_n-E)<\dfrac{1}{n}$．置

$$G=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k.$$

则 $E\subset G\subset G_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

$$G-E\subset G_n-E \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$0\leqslant m^*(G-E)\leqslant m^*(G_n-E)<\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$，由上式即得 $m^*(G-E)=0$，即知 $G-E$ 可测，测度为0。而 $E=G-(G-E)$ 为两可测集之差，故 E 可测。

4. 对于任一有界集 E，存在着两集 A 与 B，A 是 F_σ 型，B 是 G_δ 型，而适合于 $A\subset E\subset B$，$mA=m_*E$，$mB=m^*E$。

证 对任一自然数 n，存在有界闭集 F_n 和有界开集 G_n 满足

$$F_n\subset E\subset G_n,$$

$$mF_n>m_*E-\frac{1}{n},$$

$$mG_n<m^*E+\frac{1}{n}.$$

置 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$。

则 A，B 即合所求。因 A 为 F_σ 型集，B 为 G_δ 型集，$A\subset E\subset B$。又由

$$F_n\subset A\subset E, \quad G_n\supset B\supset E$$

有 $m_*E\geqslant mA\geqslant mF_n>m_*E-\dfrac{1}{n}$，

$$m^*E\leqslant mB\leqslant mG_n<m^*E+\frac{1}{n},$$

令 $n\to\infty$，即得

$$mA=m_*E, \quad mB=m^*E.$$

5. 假如A与B是两个无共同点的可测集，那么对任一点集E，

$$m^*(E\cap(A\cup B))=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B),$$

$$m_*(E\cap(A\cup B))=m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B).$$

证 由 $E\cap(A\cup B)=(E\cap A)\cup(E\cap B)$,

$(E\cap A)\cap(E\cap B)=\phi$,

有 $m^*(E\cap(A\cup B))\leqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A)$,

$m^*(E\cap(A\cup B))\geqslant m_*(E\cap A)+m_*(E\cap A)$.

因此剩下只要证明：

$$m^*(E\cap(A\cup B))\geqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A), \quad (1)$$

$$m_*(E\cap(A\cup B))\leqslant m_*(E\cap A)+m_*(E\cap A). \quad (2)$$

先证(1)。

对任给的$\varepsilon>0$，有开集$G\supset E\cap(A\cup B)$，使

$mG<m^*(E\cap(A\cup B))+\varepsilon$.

由 $G\supset G\cap(A\cup B)=(G\cap A)\cup(G\cap B)$,

$(G\cap A)\cap(G\cap B)=\phi$,

$G\cap A\supset E\cap A$, $G\cap B\supset E\cap B$,

有 $m^*(E\cap(A\cup B))+\varepsilon>mG\geqslant m(G\cap(A\cup B))$

$=m(G\cap A)+m(G\cap B)\geqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B)$.

令$\varepsilon\to 0$即得(1)。

再证(2)。

对任意的$\varepsilon>0$，有闭集$F\subset E\cap(A\cup B)$，

使 $mF>m_*(E\cap(A\cup B))-\varepsilon$.

由 $F=F\cap(A\cup B)=(F\cap A)\cup(F\cap B)$,

$$(F\cap A)\cap(F\cap B)=\phi,$$

$$F\cap A\subset E\cap A,\quad F\cap B\subset E\cap B,$$

有 $m_*(E\cap(A\cup B))-\varepsilon<mF=m(F\cap(A\cup B))$

$$=m(F\cap A)+m(F\cap B)\leqslant m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B).$$

令$\varepsilon\to 0$即得(2)。

6. 有界集E为可测的必要且充分的条件是：对任一有界集A,

$$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap CE).$$

（卡拉太屋独里的检验法）

证 必要性。

取一区间$\Delta\supset A\cup E$，则

$$A=A\cap\Delta=A\cap(E\cup C_\Delta E),$$

由于E，$C_\Delta E$可测，且互不相交，据题5的结果得

$$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap C_\Delta E),$$

又由 $A\cap C_\Delta E=A\cap[(CE)\cap\Delta]=$

$$=(A\cap CE)\cap\Delta=A\cap CE,$$

即得 $m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap CE).$

充分性。取A为一区间$\Delta\supset E$，则有

$$m\Delta=m^*(\Delta\cap E)+m^*(\Delta\cap CE),$$

即有 $m\Delta=m^*E+m^*(C_\Delta E).$

又 $m\Delta=m_*E+m^*(C_\Delta E).$

从而得出$m^*E=m_*E$，即知E为可测集。

[注1] 类似的可以得出如下结论：

有界集E可测的充要条件为：对任一有界集A，

$$m_*A=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap CE).$$

[注2] 对有界集E，若有

$$E=\bigcup_k E_k,\ E_k\cap E_{k'}=\phi\ (k\neq k'),$$

则 $$m^*E\leqslant\sum_k m^*E_k,$$

$$m_*E\geqslant\sum_k m_*E_k.$$

今问是否确有使等式不成立的情形？回答是肯定的。

先考虑有限个集合相加的情形。不妨考虑两个集合相加的情形。利用题 6 和[注1]的结论可以说明这个问题。

取E为一不可测集，由题 6 的结论可知，必存在有界集A_1，使 $$m^*A_1<m^*(A_1\cap E)+m^*(A_1\cap CE),$$

而 $$A_1=(A_1\cap E)\cup(A_1\cap CE),$$

$$(A_1\cap E)\cap(A_1\cap CE)=\phi.$$

又由[注1]的结论可知，必存在有界集A_2，使

$$m_*A_2>m_*(A_2\cap E)+m_*(A_2\cap CE),$$

而 $$A_2=(A_2\cap E)\cup(A_2\cap CE),$$

$$(A_2\cap E)\cap(A_2\cap CE)=\phi.$$

对于无穷多个集合相加的情形，利用那汤松著《实变函数论》中$ch.3.\ \S 6$所述的$\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$中不可测子集$A$和诸$A_k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)(A_0=A)$，可以说明这个问题。

已知 $$m^*A_k=\beta>0\ (k=0,1,2,\cdots),$$

$$m_*A_k=\alpha=0\ (k=0,1,2,\cdots),$$

且诸A_k互不相交. 又

$$\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subset\left[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right].$$

由此可推知

$$m^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)\leqslant 3.$$

另一方面,

$$\sum_{k=0}^{\infty}m^*A_k=\lim_{n\to\infty}n\beta=+\infty.$$

故有 $m^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)<\sum_{k=0}^{\infty}m^*A_k.$

又由 $\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\supset\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ 知

$$m_*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)\geqslant 1.$$

而 $\sum_{k=0}^{\infty}m_*A_k=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha=0.$

故有 $m_*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)>\sum_{k=0}^{\infty}m_*A_k.$

[注3] 但可指出如下结论:

对任二集 A_1, A_2, 若存在二不相交的可测集 S_1, S_2, 使 $S_1\supset A_1$, $S_2\supset A_2$, 则必有

$$m^*(A_1\cup A_2)=m^*A_1+m^*A_2,$$

$$m_*(A_1\cup A_2)=m_*A_1+m_*A_2$$

证 利用题 6 结论，取$A=A_1\cup A_2$，$E=S_1$，并注意到

$$A\cap E=(A_1\cup A_2)\cap S_1=A_1,$$

$$A\cap CE=(A_1\cup A_2)\cap CS_1=A_2,$$

便得 $m^*(A_1\cup A_2)=m^*A_1+m^*A_2$。

利用[注1]的结论，即得

$$m_*(A_1\cup A_2)=m_*A_1+m_*A_2.$$

利用归纳法可推知：

对任意n个集$A_i(i=1, \cdots, n)$，若有n个互不相交的可测集$S_i(i=1, \cdots, n)$，使得

$$S_i\supset A_i(i=1, \cdots, n),$$

则有 $$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*A_i,$$

$$m_*\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m_*A_i.$$

对于可列无限个A_i的情形参阅题9的[注]。

7. 试作一个具有正测度的有界疏朗完全集。

法一 在[0,1]上来构造这种集合。

第一次在[0,1]中挖去以$\frac{1}{2}$为中心长为$\frac{1}{5}$的区间 $\delta=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$。余下两闭区间 $\Delta_{i_1}(i_1=0,1)$；

第二次在 $\Delta_{i_1}(i_1=0,1)$中挖去以其中点为中心长为$\frac{1}{5^2}$的 2 个区间$\delta_{i_1}(i_1=0,1)$，余下2^2个闭区间 $\Delta_{i_1i_2}(i_1,i_2=0,1)$；

依此往下做。

第n次在 2^{n-1}个区间 $\Delta_{i_1\cdots i_{n-1}}(i_k=0,1)$ 中挖去以其中点为中心长为$\frac{1}{5^n}$的2^{n-1}个区间 $\delta_{i_1\cdots i_{n-1}}(i_k=0,1)$，余下$2^n$个闭区间$\Delta_{i_1\cdots i_n}$；

如此一直做下去。

令 $$G=\delta\cup\left(\bigcup_{i_1}\delta_{i_1}\right)\cup\left(\bigcup_{(i_1,i_2)}\delta_{i_1 i_2}\right)\cup\cdots,$$

$$P=[0,1]-G.$$

显然，G为一开集，δ，δ_{i_1}，$\delta_{i_1 i_2}$，…即为其构成区间，它们互无公共端点，且不以0，1为端点。由此可知P为完全集．又

$$mG=\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{5^{n+1}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{1}{3},$$

从而 $mP=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0$。

下面再说明P为疏朗集，为此只要说明$[0,1]$中任一区间(α,β) 中必存在一个不含P的点的开区间即可。

如果 (α,β) 中有点 $x_0\in P$，则存在一个相应的 0，1 数列$(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n,\ \cdots)$ 使

$$x_0\in\Delta_{i_1}\cap\Delta_{i_1 i_2}\cap\cdots\cap\Delta_{i_1\cdots i_n}\cap\cdots,$$

再由 $m\,\Delta_{i_1\cdots i_n}<\frac{1}{2^n}\quad(n=1,2,\cdots)$

可知当n充分大，有 $\Delta_{i_1\cdots i_n}\subset(\alpha,\beta)$，从而

$$\delta_{i_1\cdots i_n}\subset\Delta_{i_1\cdots i_n}\subset(\alpha,\beta),$$

而$\delta_{i_1\cdots i_n}$不含P的点，所以P为疏朗集。即知P为一有界正测疏朗

完全集。

法二 在$[0,1]$上构造完全疏朗集P，使$mP>1-\varepsilon$，ε是任给的小于1的正数.

作和为ε的正项级数

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots.$$

将$(0,1)$中一切有理数排成

$$r_1,r_2,\cdots,\ r_n,\ \cdots.$$

对r_1，取小区间δ_1，使

$$r_1\in\delta_1\subset(0,1),\ m\delta_1<\varepsilon_1,\ \delta_1\text{端点为无理数.}$$

记第一个不在δ_1中的r为r_{i_2}，则r_{i_2}必在$\bar{\delta}_1$之外，对r_{i_2}可作小区间δ_2，使

$$r_{i_2}\in\delta_2\subset(0,\ 1),\ m\delta_2<\varepsilon_2,\ \delta_2\text{端点为无理数,}$$

$$\text{且}\quad \bar{\delta}_1\cap\bar{\delta}_2=\phi.$$

记第一个不在$\delta_1\cup\delta_2$中的r_i为r_{i_3}，则r_{i_3}必在$\bar{\delta}_1\cup\bar{\delta}_2$之外，对$r_{i_3}$又可作$\delta_3$，使

$$r_{i_3}\in\delta_3\subset(0,1),\ m\delta_3<\varepsilon_3,\ \delta_3\text{的端点为无理数,}$$

$$\text{且}\quad \bar{\delta}_1\cap\bar{\delta}_3=\phi,\ \bar{\delta}_2\cap\bar{\delta}_3=\phi.$$

如此一直作下去，得到一列不相重叠的区间：

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_n,\ \cdots$$

每个δ_k至少含一个r_i，$\delta_1\cup\cdots\cup\delta_n$必含有$r_1$，$r_2$，$\cdots r_n$，$\bigcup_{k=1}^{\infty}\delta_k\supset\{r_i\}$，$\bigcup_{k=1}^{\infty}\delta_k\subset(0,1)$，且诸$\delta_k$互无公共端点，与$[0,1]$也无公共

端点。令

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}\delta_k,\quad P=[0,1]-G.$$

则P为完全集。又

$$mG=\sum_{k=1}^{\infty}m\delta_k<\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\varepsilon,$$

从而　$mP=1-mG>1-\varepsilon>0$。

对任意区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$，必有$r_i\in(\alpha,\beta)$，又必有 δ_{k_i} 使$r_i\in\delta_{k_i}$，从而 $\delta_{k_i}\cap(\alpha,\beta)$是$(\alpha,\beta)$ 中不含P 的点的小区间。所以P为疏朗集。

8。作一个含在$[0,1]$中的可测集E，使它对任意区间 $\Delta\subset[0,1]$，有

$$m(\Delta\cap E)>0,\ m(\Delta\cap CE)>0.$$

解　(i)在任一区间 (α,β)中，对于预先指定的数$r(0<r<1)$，可构造一个稠密开集G，使$mG=r(\beta-\alpha)$。

首先在 (α,β) 中取出以其中点为中心长为 $\lambda(\beta-\alpha)$ 的区间 $\delta\left(\lambda<\frac{1}{3}\right)$；再在余下的两区间$\Delta_0,\Delta_1$中，分别取出以其中点为中心长为$\lambda^2(\beta-\alpha)$的区间$\delta_0$，$\delta_1$；再在余下的四个区间 $\Delta_{i_1i_2}$ $(i_1=0,1;\ i_2=0,1)$中分别取出以其中点为中心长为 $\lambda^3(\beta-\alpha)$的区间$\delta_{i_1i_2}$；等等。如此一直做下去。令G为所有这些取出的区间之和：

$$G=\delta\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{(i_1,\cdots,i_n)}\delta_{i_1\cdots i_n}.$$

显然G为开集，δ与诸$\delta_{i_1\cdots i_n}$为其构成区间。

$$mG=m\delta+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(i_1\cdots,i_n)}m\delta_{i_1\cdots i_n}$$

$$=\lambda(\beta-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\lambda^{n+1}(\beta-\alpha)=\frac{\lambda(\beta-\alpha)}{1-2\lambda}.$$

取 $\lambda=\frac{r}{1+2r}$;

则有 $mG=r(\beta-\alpha)$.

当$0<r<1$时，$0<\lambda<\frac{1}{3}$. 并由与上题同样的道理可知，$P=[\alpha,\beta]-G$为疏朗完全集，从而G在$[\alpha,\beta]$中稠密.

(ii) 在$[0, 1]$中构造出所要求的集合E.

对于$[0, 1]$，取$r=\frac{3}{4}$，按 (i) 作出相应的稠密开集G_0，$mG_0=\frac{3}{4}$. 由G_0为开集，$G_0=\bigcup_{i=1}^{\infty}\delta_i^{(0)}$，$\delta_i^{(0)}$为$G_0$的构成区间。再对每个$\delta_i^{(0)}$，按($i$)的做法，得出一稠密开集$G_i^{(0)}$，使$mG_i^{(0)}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)m\delta_i^{(0)}$，并令$G_1=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^{(0)}\subset G_0$，则

$$mG_1=\sum_{i=1}^{\infty}mG_i^{(0)}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)mG_0.$$

由G_1为开集，$G_1=\bigcup_{i=1}^{\infty}\delta_i^{(1)}$，$\delta_i^{(1)}$为$G_1$的构成区间. 再对每个$\delta_i^{(1)}$，按 ($i$) 做出相应的稠密开集$G_i^{(1)}$，使$mG_i^{(1)}=\left(1-\frac{1}{4^2}\right)m\delta_i^{(1)}$，并令$G_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^{(1)}\subset G_1$，则

$$mG_2=\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right).$$

如此继续下去，得出一列单调下降的开集：

$$G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

$$mG_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)\quad (n=0,\ 1,\ \cdots).$$

令 $E=\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$。显然$E$可测，且

$$mE=\lim_{n\to\infty} mG_n=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(iii) 证明集E满足题目要求。

任取开区间 $\Delta\subset[0,\ 1]$。易知每一个G_n于$[0,\ 1]$中稠密，从而可知$\Delta\cap E\neq\phi$（参阅第二章题15）。设$x_0\in\Delta\cap E$，则在每一个G_n中有它的一个构成区间$\delta_{i_n}^{(n)}\ni x_0$。又易知

$$m\delta_{i_n}^{(n)}<\frac{1}{3^{n+1}}\to 0\quad (n\to\infty),$$

故存在一充分大的n_0，使$x_0\in\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\subset\Delta$。由

$$\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E=\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap\bigcap_{k=n_0}^{\infty} G_k$$

$$m\left(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E\right)=\left[\prod_{k=n_0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)\right]m\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}$$

以及 $$1>\prod_{k=n_0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{1}{2}\left[\prod_{k=0}^{n_0-1}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)\right]^{-1}>0$$

可知 $m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E)>0$，$m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap CE)>0$。

从而 $m(\Delta\cap E)\geqslant m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E)>0$,

$m(\Delta\cap CE)\geqslant m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap CE)>0$。

9. 设$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，若$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$是一有界集，则

$$\lim_{n\to\infty}m^*E_n=m^*E。$$

证 由$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots\subset E$和$E$有界，可知$\lim\limits_{n\to\infty}m^*E_n$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}m^*E_n\leqslant m^*E。$$

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}m^*E_n\geqslant m^*E$：

由E有界，可作开区间$\Delta\supset E\supset E_n$。对于每一个$E_n$和任给的$\varepsilon>0$，存在有界开集$G_n$，使$E_n\subset G_n\subset\Delta$，且

$$mG_n<m^*E_n+\varepsilon\ (n=1,\ 2,\ \cdots)。$$

令 $A_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}G_k\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n。$$

易知 $E_n\subset A_n\subset\Delta\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,

从而 $E\subset A\subset\Delta$

$$m^*E\leqslant mA=\lim_{n\to\infty}mA_n。\qquad(*)$$

又由 $A_n\subset G_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,

有 $mA_n\leqslant mG_n<m^*E_n+\varepsilon\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$。

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}mA_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}m^*E_n+\varepsilon$。

联系到(*)式得知

$$m^*E \leqslant \lim_{n\to\infty} m^*E_n + \varepsilon.$$

再由ε任意，即得

$$m^*E \leqslant \lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

总上得知 $m^*E = \lim_{n\to\infty} m^*E_n.$

[注 1] 相应有如下结论：

设$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$，$E_1$有界，$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，

则 $\lim_{n\to\infty} m_* E_n = m_* E.$

证 取开区间$\Delta \supset E_1$，并记

$$A_n = C_\Delta E_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

则 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset \Delta.$

令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$

显然$A \subset \Delta$，且

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_\Delta E_n = C_\Delta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = C_\Delta E.$$

由题 9 结论知

$$\lim_{n\to\infty} m^*A_n = m^*A.$$

而 $m_*E_n = m\Delta - m^*(C_\Delta E_n) = m\Delta - m^*A_n,$

$$m_*E = m\Delta - m^*(C_\Delta E) = m\Delta - m^*A,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} m_*E_n = m_*E.$

[注 2] 利用题 9 的结论可以推知：

设$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$有界，若对任意正整数$n$都有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^* E_k,$$

则必有 $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^* E_k$.

10. 凡能解答较易测度问题的测度理论，必使有界可列集的测度为零.

证 设 $E_0 = \{x_1, x_2, \cdots\}$，$E_0 \subset [-N, N]$，$N$ 为一充分大的确定正数. 记

$$r_{ij} = x_i - x_j (i \neq j, \ i, \ j = 1, \ 2, \ \cdots).$$

易知 $\{r_{ij}\}$ 可列. 从而可取 $a_1 \in (-1, 1)$，$a_1 \overline{\in} \{r_{ij}\}$. 作运动 $\varphi_1(x) = x + a_1$，记 $E_1 = \varphi_1(E_0)$. 再取 $a_2 \in (-1, 1)$，$a_2 \overline{\in} \{r_{ij}\}$，且 $a_1 \neq a_2$，$a_1 - a_2 \overline{\in} \{r_{ij}\}$.（由于使 $a_1 - a = r_{ij}$ 的一切 a 可列，可知这种 a_2 可以取到）. 作运动 $\varphi_2(x) = x + a_2$，记 $E_2 = \varphi_2(E_0)$. 如此作下去，得到集列 $\{E_k\}$ 和数列 $\{a_k\}$，满足：

$$a_k \in (-1, 1), \ a_k \overline{\in} \{r_{ij}\}, \ a_k - a_l \overline{\in} \{r_{ij}\} \ (k \neq l),$$

$$\varphi_k(x) \triangleq x + a_k, \ E_k = \varphi_k(E_0).$$

下面来说明，所得诸 E_k 互不相交.

假若 $E_k \cap E_0 \neq \phi (k \neq 0)$，则必有点 $z \in E_k$，同时 $z \in E_0$，从而有

$$z = x_j + a_k = x_i,$$

即有 $a_k = x_i - x_j = r_{ij}$,

此与 a_k 的取法相矛盾. 故必有

$$E_k \cap E_0 = \phi \ (k \neq 0).$$

又假若有$E_k \cap E_l \neq \phi$ $(k \neq l)$，则必有点$z \in E_k \cap E_l$。从而有

$$z = x_j + a_k = x_i + a_l,$$

即有 $a_k - a_l = x_i - x_j = r_{ij}$,

又得矛盾。故必有

$$E_k \cap E_l = \phi \quad (k \neq l).$$

今设测度μ满足较易测度问题的三个条件，从而μ具有单调性，且知$\mu[a, b] = b - a$。再注意到

$$E_k \subset [-N-1, N+1] \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\bigcup_{k=0}^{n} E_k \subset [-(N+1), N+1] \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是对任何正整数n有

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(E_k) \leqslant 2(N+1).$$

再由测度μ对运动的不变性，

$$\mu E_k = \mu E_0 \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

从而得

$$(n+1)\mu E_0 \leqslant 2(N+1),$$

即有 $\mu E_0 \leqslant \dfrac{2(N+1)}{n+1}$.

注意到n可任意大，而N是一确定正数，故必有$\mu E_0 = 0$。

11. 有界集E可测的充要条件是：存在F_σ型集$A \subset E$，使$m^*(E-A) = 0$。

证 充分性。由$m^*(E-A) = 0$知$E-A$可测。由A为F_σ型集知A可测。再由$E = (E-A) \cup A$可知E可测。

必要性．根据题3结论，对每一自然数n，存在闭集$F_n\subset E$，使$m(E-F_n)<\frac{1}{n}$．且不妨设$F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots$（否则用$\bigcup_{i=1}^{n}F_i$代替$F_n$）．从而有

$$(E-F_1)\supset(E-F_2)\supset(E-F_3)\supset\cdots$$

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E-F_n)\right)=\lim_{n\to\infty}m(E-F_n)=0.$$

令$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，则$A$为$F_\sigma$型集，$A\subset E$．并由

$$E-A=E-\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E-F_n)$$

可知$m(E-A)=0$，即有$m^*(E-A)=0$．

［注］ 类似地可以证明如下结论．

有界集E可测的充要条件是：存在G_δ型集$B\supset E$，使$m^*(B-E)=0$．

12．E为直线上的有界集，$m^*E=p>0$，则对于任一小于p的正数q，存在E的子集E_1，使$m^*E_1=q$．

证 取$[a,b]\supset E$，定义函数

$$f(x)=m^*([a,x]\cap E)\quad(x\in[a,b]).$$

显然f为$[a,b]$上单调增加的函数．下证f在$[a,b]$上连续．

任取$x\in[a,b)$及任一正数h（只要$x+h\in[a,b]$），有

$$f(x+h)-f(x)=m^*([a,x+h]\cap E)-m^*([a,x]\cap E)$$
$$\leqslant m^*([a,x]\cap E)+m^*([x,x+h]\cap E)$$
$$-m^*([a,x]\cap E)$$

$=m^*([x,\ x+h]\cap E)\leqslant m[x,\ x+h]=h,$

从而有 $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x+h)=f(x)$.

即知 f 在 x 处右连续. 同理可证, 对任一 $x\in(a,\ b]$, f 在 x 处左连续. 所以 f 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续.

注意到 $f(a)=0$, $f(b)=p$, $f(a)<q<f(b)$, 由介值定理, 存在 $\xi\in(a,\ b)$, 使 $f(\xi)=q$. 即

$$m^*([a,\ \xi]\cap E)=q.$$

由此可见集合 $E_1=[a,\ \xi]\cap E$ 即合所求.

[注] 如 E 可测, $mE=p>0$, 则结论是: 对于任意的数 q, $0<q<p$, 存在可测集 $E_1\subset E$, 使 $mE_1=q$.

13. 设在 $[0,\ 1]$ 上有可测集 A_1, A_2, …, A_n, 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} mA_i>n-1$. 则交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 必有正测度.

证 记 $\Delta=[0,\ 1]$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=C_\Delta\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_\Delta A_i\right),$$

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=1-m\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_\Delta A_i\right).$$

而 $$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_\Delta A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n} m(C_\Delta A_i)=\sum_{i=1}^{n}(1-mA_i)$$

$$=n-\sum_{i=1}^{n} mA_i<n-(n-1)=1.$$

所以必有

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)>0.$$

14. 设可测集 $A\subset[-1,1]$，且$mA>1$，试证必存在A的正测子集关于原点对称.

证 记$E=A\cap[-1,0]$，$F=A\cap[0,1]$.
则$A=E\cup F$. 作反射运动$\varphi(x)=-x$，并记

$$E^*=\varphi(E),\ G^*=E^*\cap F,\ G=\varphi(G^*).$$

再令 $B=G\cup G^*$.
则B即合所求.

首先由作法可知B关于原点对称. 由$G^*\subset F$，$G\subset E$（由$G^*\subset E^*$可知），可知$B\subset A$. 又由$E^*\subset[0,1]$，$F\subset[0,1]$，且

$$mE^*+mF=mE+mF=m(E\cup F)=mA>1,$$

根据题13的结论($n=2$的情形)，可知

$$mG^*=m(E^*\cap F)>0.$$

又 $mG=mG^*$,

$\therefore$ $mB=2mG^*>0$.

即知B为A的关于原点对称的正测子集.

15. 设A是一个具有正测度的线性可测集，则A中必存在距离为无理数的点对.

证 先证结论：具有正测度的任何线性可测集有连续统的势.

设线性集E可测，$mE=p>0$. 显然$\overline{\overline{E}}\leqslant c$. 下证$\overline{\overline{E}}\geqslant c$.

根据可测集性质，对任意$\varepsilon>0$，存在闭集$F\subset E$，使$mF>p-\varepsilon$(取ε充分小，使$p-\varepsilon>0$)．设$mF=q$，由$q>0$知闭集F不可列。从而$F=P\cup D$，P为完全集，D至多可列．显然P为非空完全集，故$\overline{\overline{P}}=c$。而$E\supset P$，故$\overline{\overline{E}}\geqslant c$。从而$\overline{\overline{E}}=c$。

利用上述结论证明正测线性集A中存在距离为无理数的点对。

今$mA>0$，故$\overline{\overline{A}}=c$。在$A$中任取一点$x_0$。则数集$\{|x-x_0|\,|\,x\in A\}\overset{\Delta}{=\!=}B$ 的势也为c。因而B中的数$|x-x_0|$不可能都是有理数。即至少存在一点$x\in A$，使$|x-x_0|$为无理数。

16. 举出一列可测集$\{E_n\}$，含在一个有限区间中，而且$\lim\limits_{n\to\infty} mE_n$存在，但$m\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n\right)\neq m\left(\underline{\lim\limits_{n\to 8}} E_n\right)$。$\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n\right.$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$ 分别表集列$\{E_n\}$的上限集与下限集$\left.\right)$

解 考察如下集列

$$E_n=\begin{cases}\left(-1-\dfrac{1}{n},\ 0\right] & (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots),\\[2ex] \left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right) & (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots).\end{cases}$$

显然 $E_n\subset(-2,\ 2)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$。

又 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$

$$=\left[\bigcap_{n\text{为奇数}}\left(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n+1}\right)\right]\cap$$

$$\left[\bigcap_{n\text{为偶数}}\left(-1-\frac{1}{n+1},\ 1+\frac{1}{n}\right)\right]=[-1,\ 1].$$

$$\varliminf_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{0\}=\{0\}.$$

所以 $m\left(\varlimsup_{n\to\infty}E_n\right)=2\neq m\left(\varliminf_{n\to\infty}E_n\right)=0.$

虽然$\lim\limits_{n\to\infty}E_n$不存在，但$\{mE_n\}$存在极限，

$$\lim_{n\to\infty}mE_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

17. 设$\{E_n\}$为可测集列，且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$有界，则

$$m\left(\varliminf_{n\to\infty}E_n\right)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}mE_n,$$

$$m\left(\varlimsup_{n\to\infty}E_n\right)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}mE_n.$$

证 由 $\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k,$

而 $\left\{\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right\}\uparrow$，据书中$ch.3.\S4.$定理11，

$$m\left(\varliminf_{n\to\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}m\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k.$$

又由 $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k\subset E_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$

$$m\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant mE_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

可知 $\varliminf\limits_{n\to\infty} m\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k\right)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} mE_n$.

从而 $m\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} m\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k=\varliminf\limits_{n\to\infty} m\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty} mE_n.$$

同样，由 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$，

而 $\left\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k\right\}\downarrow$，

从而 $m\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} m\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$.

又由 $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k\supset E_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，

$$m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_h\right)\geqslant mE_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

可知 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} m\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} mE_n$.

从而 $m\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} m\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k=\varlimsup\limits_{n\to\infty} m\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$

$$\geqslant\varlimsup_{n\to\infty} mE_n.$$

第四章　可测函数

本章内容　可测函数的概念及其基本性质．可测函数列的各种收敛性：几乎处处收敛、度量收敛、一致收敛，及它们之间关系的勒贝格定理、黎斯定理及叶果洛夫定理．最后研究了可测函数的结构，用连续函数逼近可测函数的波雷尔定理、鲁金定理、弗力许定理．用多项式函数来逼近可测函数的维尔斯特拉斯定理和改进形式的波雷尔定理、鲁金定理、弗力许定理．

1． 若　$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g_n(x)\Longrightarrow g(x)$，则

$$f_n(x)+g_n(x)\Longrightarrow f(x)+g(x).$$

证　对任给的 $\sigma>0$，由假设知：

$$\lim_{n\to\infty} mE\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} mE\left(|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)=0$$

易知　$E(|f_n+g_n-(f+g)|\geqslant\sigma)$

$$\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\cup E\left(|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right),$$

对一切自然数 n 皆成立．

所以　$mE(|f_n+g_n-(f+g)|\geqslant\sigma)$

$$\leqslant mE\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)+mE\left(|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n+g_n-(f+g)|>\sigma)=0$。

亦即 $f_n+g_n \Longrightarrow f+g$。

2．设 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g(x)$是几乎处处有限的可测函数，则

$$f_n(x)\cdot g(x)\Longrightarrow f(x)\cdot g(x).$$

证 对任给的$\varepsilon>0$，由$g(x)$几乎处处有限，故存在正数K，使得

$$mE(|g|>K)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，于是对任给的$\sigma>0$，存在$N=N(K,\sigma)$，使得当$n>N$时

$$mE\left(|f_n-f|>\frac{\sigma}{K}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

易知 $E(|f_n\cdot g-f\cdot g|>\sigma)$

$$\subset E(|g|>K)\ \cup E\left(|f_n-f|>\frac{\sigma}{K}\right),$$

故当$n>N$时，有

$$mE(|f_n\cdot g-f\cdot g|>\sigma)$$

$$\leqslant mE\ (|g|>K)\ +mE\left(|f_n-f|>\frac{\sigma}{K}\right)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

亦即 $f_n(x)\cdot g(x)\Longrightarrow f(x)\cdot g(x)$。

〔注〕 关于度量收敛还有下列结论：

设 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g_n(x)\Longrightarrow g(x)$，$f(x)$、$g(x)$几乎处处

有限，则有

(1) $f_n(x)-g_n(x)\Longrightarrow f(x)-g(x)$,

(2) $|f_n(x)|\Longrightarrow|f(x)|$,

(3) $f_n^2(x)\Longrightarrow f^2(x)$,

(4) $f_n(x)\cdot g_n(x)\Longrightarrow f(x)\cdot g(x)$。

证 (1) 由$E(|f_n-g_n-(f-g)|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\dfrac{\sigma}{2}\right)\cup$

$E\left(|g_n-g|\geqslant\dfrac{\sigma}{2}\right)$

和$f_n\Longrightarrow f$，$g_n\Longrightarrow g$，即可得到

$$f_n-g_n\Longrightarrow f-g.$$

(2) 由 $E(||f_n|-|f||\geqslant\sigma)\subset E(|f_n-f|\geqslant\sigma)$和 $f_n\Longrightarrow f$，即可得到：

$$|f_n(x)|\Longrightarrow|f(x)|.$$

(3) 由 $f_n\Longrightarrow 0$，很容易得到 $f_n^2\Longrightarrow 0$。再由 $f_n^2-f^2=(f_n-f)^2+2f\cdot(f_n-f)$，和 $f_n-f\Longrightarrow 0$，f 几乎处处有限，

所以 $(f_n-f)^2\Longrightarrow 0$，$2f\cdot(f_n-f)\Longrightarrow 0$，

即可得到

$$f_n^2-f^2\Longrightarrow 0,$$

或 $f_n^2\Longrightarrow f^2$

(4) 由 $f_n\cdot g_n-f\cdot g$

$$=(f_n-f)\cdot(g_n-g)+f\cdot(g_n-g)+g\cdot(f_n-f)$$

$$=\frac{1}{4}[(f_n-f+g_n-g)^2-(f_n-f-g_n+g)^2]$$

$$+f\cdot(g_n-g)+g\cdot(f_n-f)$$

及　$f_n \Longrightarrow f$，$g_n \Longrightarrow g$，f、g几乎处处有限，可知

$$(f_n - f)^2 + (g_n - g)^2 \Longrightarrow 0,$$

$$(f_n - f)^2 - (g_n - g)^2 \Longrightarrow 0,$$

$$f \cdot (g_n - g) \Longrightarrow 0,$$

$$g \cdot (f_n - f) \Longrightarrow 0.$$

从而$f_n(x) \cdot g_n(x) \Longrightarrow f(x) \cdot g(x)$。

3. 对于 E 中每一点都趋于 $+\infty$ 的函数列建立叶果洛夫定理.

解　(i) 建立相应的叶果洛夫定理：(不妨将条件放宽.)

设可测函数列 $\{f_n(x),\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 在E上几乎处处收敛于$+\infty$，则对任给的$\delta>0$，有 $E_\delta \subset E$，$m(E-E_\delta)<\delta$，$\{f_n(x)\}$在E_δ上一致收敛于$+\infty$.

(ii) 给出此定理的证明.

令　$P = E(f_n \to +\infty)$

$Q = E - P$

由假设可知：$mQ = 0$。

取数列$a_i \uparrow +\infty$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$. 则有：

$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E(f_k > a_i),$$

$$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E(f_k \leqslant a_i).$$

这种把收敛点集用集合运算形式表示，以后还会用到. 读者从收敛点集定义，不难证明这种形式的正确性.

记 $A_n^i = \bigcup_{k=n}^{\infty} E(f_k \leqslant a_i)$

$$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E(f_k \leqslant a_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^i$$

由 $mQ = 0$,

可知 $m \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^i = 0$,

也易知$A_{n+1}^i \subset A_n^i$,

从而 $\lim_{n \to \infty} mA_n^i = 0$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$。

现取正数列$\{\eta_i\} \downarrow 0$，且$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < +\infty$. 则对每一个$a_i$，$\eta_i$必存在$n_i$ 使得

$$mA_{n_i}^i < \eta_i$$

对任给$\delta > 0$，必有i_0存在，使得

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta.$$

令 $E_\delta = \bigcap_{i=i_0}^{\infty} \bigcap_{k=n_i}^{\infty} E(f_k > a_i)$

则 $m(E - E_\delta) = m\left(E - \bigcup_{i=i_0}^{\infty} A_{n_i}^i\right)$

$$\leqslant \sum_{i=i_0}^{\infty} mA_{n_i}^i = \sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta.$$

下面证明在E_δ上$f_k(x)$一致趋于$+\infty$。

对任给正数M，必有$i_1(\geqslant i_0)$存在，使得$a_{i_1}>M$。

对任一$x\in E_\delta=\bigcap_{i=i_0}^{\infty}\bigcap_{k=n_i}^{\infty}E(f_k>a_i)$，必有：

$$x\in\bigcap_{k=n_{i_1}}^{\infty}E(f_k>a_{i_1}),$$

此式表明，当$k\geqslant n_{i_1}$时，对一切$x\in E_\delta$恒有

$$f_k(x)>a_{i_1}>M.$$

而n_{i_1}的取法与x无关，只与M有关。从而立即得到：$\{f_k(x)\}$在E_δ上一致趋于无穷$(+\infty)$。

4. 存在以多项式为项的级数$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)+\cdots$具有下列的性质：对于在$[a,b]$上所定义的任何一个连续函数$f(x)$，可以将此级数由项的归并（但不变更其顺序）使级数$\sum_{k=1}^{\infty}[p_{n_k+1}(x)+\cdots+p_{n_{k+1}}(x)]$在$[a,b]$上一致地收敛于$f(x)$。

证 对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，根据维尔斯脱劳司定理存在一列多项式$\{g_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。而对于每个$g_n(x)$又存在一列有理系数多项式$\{h_k^n(x)\}$一致地收敛于$g_n(x)$。从而存在一列有理系数多项式$\{h_i(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。$\{h_i(x)\}$取法如下：

设数列$\{\varepsilon_i\}\downarrow 0$，对每个$\varepsilon_i>0$，必有$n_i$，对一切$x\in[a,b]$恒有：

$$|g_{n_i}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon_i}{2},$$

对每个$g_{n_i}(x)$，必有$h_{k_i}^{n_i}(x)$，使得，对一切$x\in[a, b]$，恒有

$$|g_{n_i}(x)-h_{k_i}^{n_i}(x)|<\frac{\varepsilon_i}{2}.\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.)$$

令　$h_i(x)=h_{k_i}^{n_i}(x)$。

对任给$\varepsilon>0$，必有$\varepsilon_{i_0}<\varepsilon$，从而，当$i\geqslant i_0$时，对一切$x\in[a, b]$恒有：

$$\begin{aligned}&|h_i(x)-f(x)|\\ \leqslant&|h_i(x)-g_{n_i}(x)|+|g_{n_i}(x)-f(x)|\\ <&\varepsilon_i<\varepsilon_{i_0}<\varepsilon.\end{aligned}$$

即知$\{h_i(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$。

而有理系数多项式全体只有可列个，不妨排成$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\varphi_3(x)$，$\cdots\varphi_n(x)\cdots$。

由上述可知：对任一$[a, b]$区间上的连续函数$f(x)$，必有$\{\varphi_n(x)\}$的一个子列$\{\varphi_{n_i}(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$。再令：

$$p_1(x)=\varphi_1(x)\qquad p_2(x)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\cdots$$

$$p_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x),\ \cdots.$$

于是　$$\begin{aligned}\varphi_{n_k}(x)&=\sum_{i=1}^{n_k}p_i(x)\\&=\sum_{i=0}^{k-1}(p_{n_j+1}(x)+p_{n_j+2}(x)+\cdots+p_{n_{i+1}}(x))\end{aligned}$$

于是，$\{\varphi_{n_k}(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$，就等价于级数$\sum\limits_{i=0}(p_{n_i+1}(x)+\cdots+p_{n_{i+1}}(x))$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。

由此可知，多项式级数

$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)+\cdots+p_n(x)+\cdots$ 即合乎要求。

5. 几乎处处有限的可测函数列 $f_1(x)$，$f_2(x)$，… 要它度量收敛的必要且充分的条件是：对于任何正数σ和ε，有如下的N：当$n>N$，$m>N$时，

$$mE(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)<\varepsilon.$$

证 必要性.

由于$f_n\Longrightarrow f$，对任给定的$\varepsilon>0$，$\sigma>0$，存在N，当$n>N$时，

$$mE\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又易知：
$$E(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\cup$$
$$\cup E\left(|f_m-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right),$$

$$mE(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)\leqslant mE\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)+$$
$$+mE\left(|f_m-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$$

从而当$n>N$，$m>N$时，

$$mE(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)<\varepsilon.$$

下面证明充分性：

先找出一个子序列$\{f_{n_k}(x)\}$在E上几乎处处收敛。

任取数列$\{\eta_k\}$，$\eta_k>0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k<+\infty$.

由所设条件可知：存在n_k，使得

$$mE\left(|f_{n_k}-f_{n_k+m}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)<\eta_k$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

从而可取 $n_k\uparrow+\infty$，且有

$$mE\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)<\eta_k$$

对这串 $\{n_k\}$ 作 Q，P：

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)$$

$$P=E-Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|<\frac{1}{2^k}\right)$$

令 $R_i=\bigcup\limits_{k=i}^{\infty}E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)$，

显然 $R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset R_{n+1}\supset\cdots$

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$$

因此 $mQ=\lim\limits_{i\to\infty}mR_i$

$$\leqslant\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}mE\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\leqslant\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k=0.$$

所以 $mQ=0$。

下面证明 $\{f_{n_k}(x)\}$ 是 P 上的收敛基本列。

记 $P=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty}E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|<\frac{1}{2^k}\right)$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

显然　$A_i\subset A_{i+1}\subset A_{i+2}\subset\cdots$。

若$x\in P$，必存在 i_0，使得 $x\in A_{i_0}\subset A_{i_0+1}\subset\cdots$

对任给$\varepsilon>0$，必有 $i>i_0$，使得$\frac{1}{2^{i-1}}<\varepsilon$，$x\in A_i\subset A_{i+1}\subset$

$\cdots$故对一切$l>i$，$m=1$，2，$\cdots\cdots$有

$$|f_{n_l}(x)-f_{n_{l+m}}(x)|\leqslant\sum_{j=l}^{m}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|$$

$$\leqslant\sum_{j=i}^{\infty}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|$$

$$\leqslant\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{i-1}}<\varepsilon.$$

所以，$f_{n_k}(x)$在P上收敛于某$f(x)$。

其中　$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)\quad(x\in P)$。

显然　$f_{n_k}\Longrightarrow f$。

于是对任给的$\sigma>0$，$\varepsilon>0$，存在N，当$n_k>N$，$n>N$时

$$mE\left(|f_n-f_n^k|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$mE\left(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而　$E(|f_n-f|>\sigma)$

$$\subset E\left(|f_n-f_{n_k}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\cup E\left(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$$

所以，当$n>N$时，

$$mE(|f_n-f|>\sigma)<\varepsilon.$$

即 $f_n \Rightarrow f$.

6. 在波雷耳和弗力许定理中，假设定义的线节是$[-\pi, +\pi]$，那末在所述的结果中可以将三角多项式代替连续函数。

证 (i)（波雷耳）设$f(x)$于$E=[-\pi, \pi]$上几乎处处有限可测，那末对任给的正数σ和ε，有三角多项式$T(x)$，使得

$$mE(|f-T|\geqslant\sigma)<\varepsilon.$$

下面证明此结论：

由已证的波雷耳定理知：对$f(x)$，有E上的连续函数$\psi(x)$满足：

$$mE\left(|f-\psi|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

若$\psi(-\pi)=\psi(\pi)$，则$\psi(x)$可延拓为以2π为周期的连续函数。若$\psi(-\pi)\neq\psi(\pi)$，造一个新的函数$\psi_1(x)$，满足：

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\in[-\pi, \pi-\eta]\\ \psi(-\pi)+\dfrac{\psi(\pi-\eta)-\psi(-\pi)}{\eta}(\pi-x), & x\in(\pi-\eta, \pi]\end{cases}$$

其中 $0<\eta<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而$\psi_1(\pi)=\psi_1(-\pi)$，

$$mE(\psi_1\neq\psi)\leqslant\eta<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\psi_1(x)$就可以延拓成为以2π为周期的连续函数。而

$$E\left(|f-\psi_1|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\subset E\ (\psi\neq\psi_1)E\cup\left(|\psi-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$$

从而有 $\quad mE\left(|f-\psi_1|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

对 $\psi_1(x)$ 根据连续函数与三角多项式函数之间关系的维尔斯特拉斯定理，有三角多项式$T(x)$满足

$$|\psi_1(x)-T(x)|<\frac{\sigma}{2},$$

又因 $\quad E(|f-T|\geqslant\sigma)$

$$\subset E\left(|f-\psi_1|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\cup E\left(|\psi_1-T|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$$

从而 $\quad mE(|f-T)\geqslant\sigma)\leqslant mE\left(|f-\psi_1|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$

$$+mE\left(|\psi_1-T|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\varepsilon+0=\varepsilon.$$

于是三角多项式$T(x)$即为所求。

(ii)（弗力许）设$f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$几乎处处有限可测，则有三角多项式序列$\{T_n(x)\}$几乎处处收敛于$f(x)$。

下面证明此结论。

取正数列 $\{\sigma_n\}\downarrow 0$，$\{\varepsilon_n\}\downarrow 0$。对每一对 σ_n，ε_n，由(i)知有三角多项式$T_n(x)$满足：

$$mE(|f-T_n|\geqslant\sigma_n)\ <\varepsilon_n,$$

由此得出 $T_n(x)\Longrightarrow f(x)$。从而，必有 $\{T_n(x)\}$ 的一个子序列 $\{T_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于$f(x)$。此$\{T_{n_k}(x)\}$即为所求。

7．可列个可测函数的上确界是可测函数．

证 设$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列，记

$$sup\{f_n(x)\}=f(x)$$

对于任意数a，

$$E(f>a)=E(\sup_n f_n>a)=E(\text{至少一个}f_n>a)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>a)$$

由于 f_n，$(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是E上的可测函数，$E(f_n>a)$ 是可测集。由定理：可列个可测集的和集仍为可测集。知$E(f>a)$是可测集，所以，$f(x)$是可测函数。

8. 如果对于任意固定的n，当$k\to\infty$时，$f_k^{(n)}(x)\Longrightarrow f^{(n)}(x)$，而当$n\to\infty$时，有$f^{(n)}(x)\Longrightarrow f(x)$，那么，在$\{f_k^{(n)}(x)\}$中可以选取函数列度量收敛于$f(x)$。

证 任取二个正数列$\{\sigma_n\}\downarrow 0$，$\{\varepsilon_n\}\downarrow 0$，

对每个n，由于$f_k^{(n)}\Longrightarrow f^{(n)}$，$(k\to+\infty)$。必有$k_n$使得

$$mE\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right)<\frac{\varepsilon_n}{2}.$$

下面证明 序列$\{f_{k_n}^{(n)}\}$即为所求。

对任给$\varepsilon>0$，$\sigma>0$，存在正整数N_1，当$n>N_1$时，$\sigma_n<\sigma$，$\varepsilon_n<\varepsilon$。

$$E\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\subset E\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right).$$

$$(n\geqslant N_1)$$

$$mE\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\leqslant mE\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right)$$

$$<\frac{\varepsilon_n}{2}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (n\geqslant N_1)$$

又由 $f^{(n)}\Longrightarrow f$，知存在N_2，当$n\geqslant N_2$时，

$$mE\left(|f^{(n)}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=max(N_1, N_2)$，当$n\geqslant N$时有：

$$mE\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$mE\left(|f^{(n)}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而 $E(|f_{k_n}^{(n)}-f|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\cup E\left(|f^{(n)}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)$，从而当 $n\geqslant N$ 时有

$$mE(|f_{k_n}^{(n)}-f|\geqslant\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即 $f_{k_n}^{(n)}\Longrightarrow f$.

9. 在上题的叙述中，如果将所有的度量收敛改为普通的收敛，则所述不成真理.

证 贝尔定理指明：设$f(x)$定义在一个完备集P上，它若是P上一组连续函数列$f_n(x)$的极限函数的必要且充分的条件是：

$f(x)$在P的每个完备子集上的连续点组成该子集中的一个处处稠密集。此定理详细证明请参阅：《实变函数论》（鲁金）中译本 212页至221页。

由此贝尔定理可知：函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,\ 1]\text{的有理数}\\ 0 & x\in[0,\ 1]\text{的无理数}\end{cases}$$

由于在[0，1]中点点都不连续，所以，它不可能表示成连续函数列的极限函数。

构造函数列

$$f_k^{(n)}(x)=[\cos(n!\,\pi x)]^{2k}$$

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}1 & n!\,x\quad\text{为整数。}\\ 0 & n!\,x\quad\text{不为整数。}\end{cases}$$

$$f(x)=D(x)$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}f_k^{(n)}(x)=\lim\limits_{k\to\infty}[\cos(n!\,x\cdot\pi)]^{2k}$，当$n!x$为整数时，$\cos(n!x\cdot\pi)^2=1$，所以，此时$\lim\limits_{k\to\infty}[\cos(n!\,x\cdot\pi)]^{2k}=1$，当$n!\,x$不为整数时$[\cos(n!\,x\cdot\pi)]^2=q<1$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}q^k=0$

即此时 $\lim\limits_{k\to\infty}[\cos(n!\,x\cdot\pi)]^{2k}=0$

即有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)\qquad x\in[0,\ 1]$。

对任一$x_0\in[0,\ 1]$，x_0为有理数，则$x_0=\dfrac{Q}{P}$，P,Q为正整数。当$n>P$时，$n!\,x_0=n!\cdot\dfrac{Q}{P}$，因为$n>P$，所以$\dfrac{n!}{P}$必为整数。

从而，当$n>P$，时　$f^{(n)}(x_0)=1$，

也就有：当$x_0\in[0,1]$，且为有理数时；

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0)=1$$

当$x_1\in[0,1]$为无理数时，由于对任何n，$n!\,x_1$ 不会是整数（若不然，有n_0，使$n_0!\,x_1=Q$，Q是整数，则$x_1=\dfrac{Q}{n_0!}$，x_1就变成有理数了）。

$f^{(n)}(x_1)=0$，对一切n成立。

$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x_1)=0$，　x_1为$[0,1]$中无理数。

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=f(x)=D(x)$。

对任何固定的n，k，$[\cos n!\,x\cdot\pi]^{2k}=f_k^{(n)}(x)$。显然是$[0,1]$中的连续函数，所以，$\{f_k^{(n)}(x)\}$的任何子列都不会收敛到$D(x)$。

10．设 $f(t)$ 是在 $E=[a,b]$ 上所定义的几乎处处有限的可测函数。那末 $[a,b]$ 上有如下的单调减函数 $g(t)$，关系 $mE(g>x)=mE(f>x)$对于任何实数x成立。

证　令　$F(x)=mE(f(t)>x)$，

则$F(x)$具有下述性质：

(i) $F(-\infty)=b-a$，$F(+\infty)=0$；

(ii) $F(x)$是单调减函数；

(iii) $F(x)$是右连续的。

(i)(ii)是显见的。现验证性质(iii)：设给定实数x_0，及实数列$\{x_n\}\downarrow x_0$。于是就有：

$$E(f(t)>x_0)=E(f(t)>x_n)\cup E(x_n\geqslant f(t)>x_0)$$

因此 $mE(f(t)>x_0)=mE(f(t)>x_n)+mE(x_n\geqslant f(t)>x_0)$

但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(x_n\geqslant f(t)>x_0)=\phi$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}mE(x_n\geqslant f(t)>x_0)=0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(F(x_n)-F(x_0))=0$.

从而可知$F(x)$是右连续的.

$$0\leqslant F(x)\leqslant b-a,$$

$$a\leqslant a+F(x)\leqslant b \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$t=a+F(x)$ 是单调不增，右连续的函数。

且 $a\leqslant t\leqslant b$.

令 $G(t)=\sup\{x\,|\,a+F(x)>t\}$,

其中$a\leqslant t\leqslant b$.

对任一$t\in(a, b)$, $\{x\,|\,a+F(x)>t\}$一定非空.

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}(a+F(x))=b$, $b-t>0$, 所以，存在 x_0，当$x<x_0$，就有

$$b-(F(x)+a)<b-t$$

即 $F(x)+a>t$. 故$\{x\,|\,F(x)+a>t\}$非空.

其次，证明 $\{x\,|\,F(x)+a>t\}$ 有上界.

这由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)+a=a$, $t-a>0$. 所以，存在x_1，当$x>x_1$ 时

$$F(x)+a-a<t-a$$

即 $x>x_1$时 $F(x)+a<t$. 由此可知：若$x\in\{x\,|\,F(x)+a>t\}$必有$x\leqslant x_1$. 所以，此集合有上界. 故存在上确界. $G(t)$有定

义.

$$G(t)=\sup\{x|F(x)+a>t\}$$

$G(t)$是单调不增的函数，这是因为如果$t_1>t_2$，若$x\in\{x|F(x)+a>t_1\}$ 必有

$$F(x)+a>t_2，\text{即}x\in\{x|F(x)+a>t_2\}$$

所以 $\sup\{x|F(x)+a>t_1\}\leqslant\sup\{x|F(x)+a>t_2\}$.

即，当$t_1>t_2$时，$G(t_1)\leqslant G(t_2)$. $G(t)$是单调不增的函数.

令 $A=\{t|G(t)>x\}$

现证 $A=[a, F(x)+a)$

若$t_0\in A$，由$G(t_0)=\sup\{x'|F(x')+a>t_0\}$

知：必有$x<x_1<G(t_0)$，使得

$$F(x_1)+a>t_0,$$

但由$F(x)$单调不增，且$x<x_1$故有：

$$t_0<F(x_1)+a\leqslant F(x)+a,$$

即 $t_0\in[a, F(x)+a)$.

若 $t_0\in[a, F(x)+a)$

即 $t_0<F(x)+a$,

由$F(x)$是右连续的，所以必有$x_1>x$，使得$F(x_1)+a>t_0$，因此$G(t_0)\geqslant x_1>x$. 所以，$t_0\in A$.

由此可知

$$A=[a, F(x)+a)$$

$$m\{t|G(t)>x\}=m[a, F(x)+a)$$

$$=F(x)=mE(f(t)>x)$$

$$G(t)=\sup\{x|F(x)+a>t\}$$

即合乎所求。

11. 设$f(t)$是在$E=(a,\ b)$上定义的几乎处处有限的可测函数。那末，有唯一的h使两关系

$$mE(f\geqslant h)\geqslant\frac{b-a}{2}\quad 和当H>h时$$

$$mE(f>H)<\frac{b-a}{2}\quad 都成立。$$

证 设 $F(x)=mE(f\geqslant x)$

和前题类似的可以证明它有如下性质：

(i) $F(-\infty)=b-a$, $F(+\infty)=0$;

(ii) $F(x)$单调非增；

(iii) $F(x)$是左连续的。

令 $A=\left\{x\,|\,F(x)\geqslant\dfrac{b-a}{2}\right\}$

由于 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=b-a$。当取 $\varepsilon=\frac{1}{8}(b-a)$时，必有 $M_0<0$ 存在，当 $x\leqslant M_0$时，

$$b-a-F(x)<\frac{1}{8}(b-a)$$

$$F(x)>\frac{7}{8}(b-a)>\frac{1}{2}(b-a).$$

从而说明了集合A是非空的。

下面证明集合A有上界，且上确界也属于A。

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，所以，必存在$M_0'$，当$x\geqslant M_0'$ 时

$F(x) < \dfrac{b-a}{2}$.

即 $x \geqslant M_0'$时，$x \overline{\in} A$；从而说明：若 $x_0 \in A$，则$x_0 < M_0'$. 集合A是有上界的. A非空、有上界必有上确界，记

$$\sup_{x \in A} \{x\} = h$$

由于h是集合A的上确界，必有$x_n \in A$，$x_n \uparrow h$，根据$F(x)$的左连续性就有

$$F(h) = \lim_{x_n \uparrow h} F(x_n) \geqslant \frac{b-a}{2}.$$

所以. $h \in A$.

若$H > h$，则必有$F(H) < \dfrac{b-a}{2}$. 假若不然，那末 $F(H) \geqslant \dfrac{b-a}{2}$，从而$H \in A$. 这就与$h$是$A$的上确界相矛盾. 故必有 $F(H) < \dfrac{b-a}{2}$.

显然，这样h是唯一的. 假如，有$h_1 < h_2$，满足：

$m(f \geqslant h_1) \geqslant \dfrac{b-a}{2}$，且$H > h_1$时，

$m(f \geqslant H) < \dfrac{b-a}{2}$. 由$h_2 > h_1$，就必有

$m(f \geqslant h_2) < \dfrac{b-a}{2}$， 决不会再有

$m(f \geqslant h_2) \geqslant \dfrac{b-a}{2}$. 所以这样的$h$是唯一的.

12. 设$\{f_n(x)\}$是几乎处处有限的可测函数列，并且$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。又设$g(x)$是实直线上的连续函数，则有$g(f_n(x))\Longrightarrow g(f(x))$。

证 由于$f(x)$几乎处处有限，且$f_n\Longrightarrow f$，对任给的$\varepsilon>0$，$\delta>0$，必有N_0及n_0存在，使得：当$n\geqslant n_0$时，

$$m\left\{x\,\middle|\,|f(x)|\geqslant N_0\right\}<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$m\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)|\geqslant N_0\right\}<\frac{\varepsilon}{4},$$

$g(x)$在$[-N_0,\ N_0]$上连续，由维尔斯特拉斯定理知：存在多项式$p(x)$，使得：

$$|g(x)-p(x)|<\frac{\delta}{4}$$

对一切$x\in[-N_0;\ N_0]$都成立。

记 $E_n=\{x\,|\,|f_n(x)|<N_0,\ \ |f(x)|<N_0\}$。

$$\{x\,|\,|g(f_n(x))-g(f(x))|\geqslant\delta\}$$

$$\subset\{x\,|\,|f_n(x)|\geqslant N_0\}\cup\{x\,|\,|f(x)|\geqslant N_0\}\cup$$

$$\cup E_n\cap\{x\,|\,|g(f_n(x))-g(f(x))|\geqslant\delta\}$$

下面就来估计$m(E_n\cap\{x\,|\,|g(f_n(x))-g(f(x))|\geqslant\delta\})$。

由于 $f_n\Longrightarrow f$，所以$[f_n(x)]^k\Longrightarrow[f(x)]^k$。利用依测度收敛的基本性质，知

$$P(f_n(x))\Longrightarrow P(f(x))$$

对前面给定的$\varepsilon>0$，$\delta>0$，必有n_1存在，当$n>n_1$时，

$$m\{x\,|\,|P(f_n(x))-P(f(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

当$x\in E_n$ 时， $|f_n(x)|<N_0$， $|f(x)|<N_0$，

从而有：

$$|g(f_n(x))-P(f_n(x))|<\frac{\delta}{4},$$

$$|g(f(x))-P(f(x))|<\frac{\delta}{4}$$

由此可知：

$$E_n\cap\{x\big||g(f_n(x))-P(f_n(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}=\phi$$

$$E_n\cap\{x\big||g(f(x))-P(f(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}=\phi$$

而 $E_n\cap\{x\big||g(f_n(x))-g(f(x))|\geqslant\delta\}$

$$\subset\left(E_n\cap\{x\big||g(f_n(x))-P(f_n(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}\right)\cup$$

$$\cup\left(E_n\cap\{x\big||P(f_n(x))-P(f(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}\right)\cup$$

$$\cup\left(E_n\cap\{x\big||g(f(x))-P(f(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}\right)$$

$$=E_n\cap\{x\big||P(f_n(x))-P(f(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}.$$

当$n\geqslant max\{n_0, n_1\}$ 时，

$$m\{x\big||g(f_n(x))-g(f(x))|>\delta\}$$

$$\leqslant m\{x\big||f_n(x)|\geqslant N_0\}+m\{x\big||f(x)|\geqslant N_0\}$$

$$+m\left(E_n\cap\{x\big||P(f_n(x))-P(f(x))|\geqslant\frac{\delta}{3}\}\right)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即可知：

$$g(f_n(x)) \Longrightarrow g(f(x))。$$

13. 定义在可测集上的任何单调一元函数都是可测函数。

证 不妨设$f(x)$为可测集E上的单调增函数，$E\subset(\alpha, \beta)$。(α，β可取$-\infty$及$+\infty$)

对任给的实数a，

令 $I_a=\inf\{x|f(x)>a\}$

由$f(x)$是单调增加函数，所以有：

$$E(f>a)=\begin{cases} E\cap[I_a, \beta], & I_a\in\{x|f(x)>a\} \\ E\cap(I_a, \beta), & I_a\overline{\in}\{x|f(x)>a\} \end{cases}$$

所以，$E(f>a)$ 是一可测集。即知$f(x)$是一可测函数。同理可证，$f(x)$是单调减函数时也是可测函数。

14. 试举例说明，对于叶果洛夫定理不能加强为除掉一个测度为零的集合外，$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。

证 构造函数列如下：

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, & x=0; \\ (n+2)x, & 0<x<\dfrac{1}{n+2}; \\ 1, & \dfrac{1}{n+2}\leqslant x<\dfrac{1}{n+1}; \\ 1-n(n+1)\times\left(x-\dfrac{1}{n+1}\right), & \dfrac{1}{n+1}\leqslant x<\dfrac{1}{n}; \\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

$f_n(x)$是$E=[0, 1]$上的连续函数，必可测。

且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $\quad x\in[0, 1]$

下面证明：对任一E_0，$mE_0=0$时，$\{f_n(x)\}$在$E-E_0$上不会一致收敛。

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，不论$N$取得怎样大，总可取$n=N+1>N$，令

$$A=\left[\frac{1}{n+3}, \frac{1}{n+2}\right)-E_0.$$

显然A非空．但

$$f_{N+1}(x)=1, \quad x\in A\subset E-E_0$$

$$|f_{N+1}(x)-f(x)|=|f_{N+1}(x)|=1>\varepsilon_0, \quad x\in A$$

所以，$\{f_n(x)\}$在$E-E_0$上不一致收敛．由此可知：叶果洛夫定理不能加强为除零测集外$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$。

15. 设$f(x)$为有界闭区间$[a, b]$上的连续函数，并假设

$$\int_a^b x^n f(x)dx=0, \ (n=1, 2, 3, \cdots.)$$

则 $f(x)\equiv 0$。

证 由维尔斯特拉斯定理知：$f(x)$ 可被一多项式函数列$\{P_n(x)\}$一致地逼近．于是，对任给的$\varepsilon>0$，存在n_0，当$n\geqslant n_0$时，对一切$x\in[a, b]$，恒有

$$f(x)=P_n(x)+\varepsilon h_n(x),$$

其中 $|h_n(x)|<1$。

从而有：

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)P_n(x)dx + \varepsilon\int_a^b f(x)h_n(x)dx.$$

由假设知：

$$\int_a^b f(x)P_n(x)dx = 0$$

所以 $\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \varepsilon\int_a^b |f(x)|dx \leqslant M(b-a)\varepsilon,$

再由ε任意，于是有

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

必有 $f^2(x) \equiv 0 \qquad x \in [a, b].$

从而 $f(x) \equiv 0 \qquad x \in [a, b].$

第五章　有界函数的勒贝格积分、可和函数

本章内容　有界函数的勒贝格积分的概念及基本性质；黎曼积分与勒贝格积分的比较，黎曼可积的充要条件；原函数问题；非负可测函数的积分概念及性质，法都定理，勒维单调收敛定理；一般可和函数的概念及性质；积分号下取极限的问题，勒贝格控制收敛定理，等度绝对连续积分的概念及有关定理。

1． 若$f_n(x)\geqslant 0$且$\int_E f_n(x)dx\to 0$，则必有$f_n(x)\Longrightarrow 0$，但$f_n(x)$不一定几乎处处收敛于0。

证　先证$f_n(x)\Longrightarrow 0$。

证法一　任给$\sigma>0$，有

$$\int_E f_n(x)\,dx=\int_{E(f_n\geqslant\sigma)}f_n dx+\int_{E(f_n<\sigma)}f_n dx\geqslant\sigma\cdot mE(f_n\geqslant\sigma)\geqslant 0.$$

由　$\int_E f_n(x)dx\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$，

可知　$mE(f_n\geqslant\sigma)\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$。

即　$f_n(x)\Longrightarrow 0$。

证法二　（反证法）假如$f_n(x)$不度量收敛于0，则存在$\sigma_0>0$和$\varepsilon_0>0$以及$\{n_i\}\uparrow+\infty$，使得

$$mE(f_{n_i} \geqslant \sigma_o) \geqslant \varepsilon_o \quad (i=1,2,\cdots)$$

从而 $\displaystyle\int_E f_{n_i}(x)dx \geqslant \int_{E(f_{n_i} \geqslant \sigma_o)} f_{n_i}(x)dx \geqslant \sigma_o \cdot mE(f_{n_i} \geqslant \sigma_o)$

$$\geqslant \sigma_o \varepsilon_o (>0) \quad (i=1,2,\cdots)$$

此与题设条件

$$\int_E f_n(x)dx \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

相矛盾．故必有$f_n(x) \Longrightarrow 0$。

下面举例说明$f_n(x)$不一定几乎处处收敛于0。

如《实变函数论》$ch.4.\S 3.$中之例：

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right), \\ 0, x \bar{\in} \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right). \end{cases} \quad (0 \leqslant x < 1)$$

$(k=1,2,\cdots;\ i=1,\cdots k.)$

令 $\varphi_n(x) = f_i^{(k)}(x)$

$$\left(n = \frac{k(k-1)}{2} + i, k=1,2,\cdots;\ i=1,\cdots,k.\right)$$

则$\varphi_n(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x < 1)$，且当$n \to \infty$时，必有$k \to \infty$，从而

$$\int_E \varphi_n(x)dx = \int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} 1dx = \frac{1}{k} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

但已知$\varphi_n(x)$在$[0,1)$中处处不收敛于0。

2. 关系式

$$\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx \to 0$$

与$f_n(x)\Longrightarrow 0$是等价的。

证法一 由函数$y=\dfrac{x}{1+x}$当$x>-1$时严格增加可知

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\Longleftrightarrow|f_n|\geqslant\sigma.$$

从而可知

$$E\left(\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)=E(|f_n|\geqslant\sigma).$$

由此可推知

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\Longrightarrow 0(n\to\infty)\Longleftrightarrow f_n(x)\Longrightarrow 0\quad(n\to\infty).$$

若 $\displaystyle\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$,

根据题1结论，必有$\dfrac{|f_n|}{1+|f_n|}\Longrightarrow 0$，从而必有$f_n(x)\Longrightarrow 0$。

反之，若$f_n(x)\Longrightarrow 0$，则有$\dfrac{|f_n|}{1+|f_n|}\Longrightarrow 0$。

又 $0\leqslant\dfrac{|f_n|}{1+|f_n|}<1\quad(n=1,2,\cdots)$

由勒贝格控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx=\int_E odx=0.$$

证法二 因函数$y=\dfrac{x}{1+x}$当$x>-1$时严格增加．故对于任意的$\sigma>0$，有

$$\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\geqslant\int_{E(|f_n|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\geqslant\int_{E(|f_n|\geqslant\sigma)}\frac{\sigma}{1+\sigma}dx$$

$$=\frac{\sigma}{1+\sigma}mE(|f_n|\geqslant\sigma)\geqslant 0$$

从而，若有

$$\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\longrightarrow 0\quad(n\to\infty),$$

则有 $mE(|f_n|\geqslant\sigma)\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$.

即$f_n(x)\Longrightarrow 0$.

反之，若$f_n(x)\Longrightarrow 0$，由

$$\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx=\int_{E(|f_n|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx+\int_{E(|f_n|<\sigma)}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx$$

$$\leqslant\int_{E(|f_n|\geqslant\sigma)}1dx+\int_{E(|f_n|<\sigma)}\frac{\sigma}{1+\sigma}dx$$

$$\leqslant mE(|f_n|\geqslant\sigma)+\frac{\sigma}{1+\sigma}\cdot mE\quad(n=1,2,\cdots)$$

可知 $O\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\leqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\cdot mE$.

再由σ任意即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx=0.$$

3. 若$\alpha_n\to 0$，则有非负可测函数列$\{u_n(x)\}$使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_E u_n(x)dx<+\infty,$$

但$\{u_n(x)\}$在E中任何一点不收敛于0.

证 由$\alpha_n\to 0$，存在自然数子数列$\{n_k\}$使

$$|\alpha_{n_k}| \leqslant \frac{1}{2^k} \quad (k=1,2,\cdots).$$

今在一有界可测集E上构造非负可测函数列如下：

当$n=n_k$时，$u_n(x)\equiv 1$；

当$n\neq n_k$时，$u_n(x)\equiv 0$。

则 $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_E u_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k} \int_E u_{n_k}(x)dx = mE \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k},$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \alpha_n \int_E u_n(x)dx \right| \leqslant mE \sum_{k=1}^{n} \left| \alpha_{n_k} \right| \leqslant mE \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$
$$= mE < +\infty.$$

但显然$\{u_n(x)\}$在E上处处不收敛于0。

4． 如果积分$\int_E \varphi(x)f(x)dx$对于任何可和函数$f(x)$存在，则$\varphi(x)$几乎处处有界。

证 先就$\varphi(x)\geqslant 0$的情形来证。此时要证$\varphi(x)$在E上几乎处处有界，即证存在$K>0$，使得$mE(\varphi\geqslant K)=0$。记$E_n=E(n\leqslant\varphi<n+1)(n=0,1,2,\cdots)$。易知$\varphi$必几乎处处有限，不妨设$\varphi$有限，则$E=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}E_n$，$E_n$互不相交。假如上述的$K$不存在，则必有自然数子数列$\{n_i\}$使$mE_{n_i}=\delta_i>0\ (i=1,2,\cdots)$。作函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\delta_{2i}(2i)^{\frac{3}{2}}}, & x\in E_{n_{2i}} \\ \dfrac{-1}{\delta_{2i-1}(2i-1)^{\frac{3}{2}}}, & x\in E_{n_{2i-1}} \\ 0, & x\in E-\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{n_i} \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots)$$

由 $\int_E f_+ dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_{n_{2i}}} \frac{1}{\delta_{2i}(2i)^{3/2}} dx = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{3/2}} < +\infty$,

$$\int_E f_- dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_{n_{2i-1}}} \frac{1}{\delta_{2i-1}(2i-1)^{3/2}} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{3/2}} < +\infty,$$

可知$f(x)$可和。但由

$$\int_E \varphi(x) f(x) dx = \int_E \varphi f_+ dx - \int_E \varphi f_- dx,$$

以及$\int_E \varphi f_+ dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_{n_{2i}}} \varphi(x)\frac{1}{\delta_{2i}(2i)^{3/2}} dx$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_{2i}}{(2i)^{3/2}} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i}{(2i)^{3/2}} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{1/2}} = +\infty,$$

$$\int_E \varphi f_- dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_{n_{2i-1}}} \varphi(x)\cdot\frac{1}{\delta_{2i-1}(2i-1)^{3/2}} dx$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_{2i-1}}{(2i-1)^{3/2}} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{1/2}} = +\infty.$$

可知$\int_E \varphi(x) f(x) dx$不存在。此与题设相矛盾。故$\varphi(x)(\geqslant 0)$几乎处处有界。

对于一般的$\varphi(x)$，分别考虑$E(\varphi \geqslant 0)$和$E(\varphi < 0)$。由上述结果可推知$\varphi(x)$分别在$E(\varphi \geqslant 0)$和$E(\varphi < 0)$上几乎处处有界。从而$\varphi(x)$在E上几乎处处有界。

5. 设$f(x)$是在集E上定义的有限可测函数。设下列诸数

$$\cdots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots$$

适合$y_k \to \infty$，$y_{-k} \to -\infty$ $(k \to \infty)$，$0 < y_{k+1} - y_k < \lambda$。又置$e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1})$，则函数$f(x)$为可和的充要条件是：对于任何$\{y_k\}$，级数$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} y_k m e_k$为绝对收敛。

证 不妨设$y_0 = 0$。因

$f(x) \in L(E) \Longleftrightarrow f_+(x) \in L(E)$，$f_-(x) \in L(E)$，故只需证明：

$1°$ $f_+(x) \in L(E) \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k \cdot m e_k$收敛；

$2°$ $f_-(x) \in L(E) \Longleftrightarrow -\sum\limits_{k=-1}^{-\infty} y_k \cdot m e_k$收敛。

由 $$-\sum_{k=-1}^{-\infty} y_k \cdot m e_k = -\sum_{k=1}^{\infty} y_{-k} \cdot m e_{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} y'_k \cdot m e'_k,$$

其中 $y'_k = -y_{-k}$，

$$e'_k = e_{-k} = E(y_{-k} \leqslant f < y_{-k+1})$$
$$= E(-y_{-k+1} < -f \leqslant -y_{-k}) = E(y'_{k-1} < -f \leqslant y'_k),$$

可见$2°$与$1°$同理。故下面只证$1°$。由

$$y_k \cdot m e_k \leqslant \int_{e_k} f_+(x) dx \leqslant y_{k+1} \cdot m e_k \quad (k = 0, 1, \cdots),$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \cdot m e_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{e_k} f_+(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{n} y_{k+1} \cdot m e_k$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot me_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} me_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} y_k me_k + \lambda \cdot mE,$$

令$n \to \infty$即得

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot me_k \leqslant \int_E f_+(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot me_k + \lambda \cdot mE.$$

由上式即知

$$\int_E f_+(x)dx < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot me_k < +\infty.$$

6. 在习题5的假设下，如果级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot me_k$ 绝对收敛的话，那么级数的和当$\lambda \to 0$时趋于$\int_E f(x)dx$.

证 由$\sum y_k \cdot me_k$绝对收敛和上题证明中的(*)式可知，当$\lambda \to 0$时有

$$\int_E f_+(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot me_k.$$

同理有

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=-1}^{-\infty} y_k \cdot me_k &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} y_{-k} \cdot me_{-k} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \left(-\sum_{k=1}^{\infty} y'_k \cdot me'_k \right) \\ &= -\int_E f_-(x)dx. \end{aligned}$$

从而 $$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot me_k = \int_E f_+(x)\,dx - \int_E f_-(x)dx$$

$$=\int_E f(x)dx.$$

7. 一致收敛的(R)可积函数列，其极限函数亦为(R)可积.

证 设$\{f_n(x)\}$为$[a,b]$上(R)可积函数列，且一致收敛于$F(x)$.

因(R)可积函数必有界，故对每个f_n，存在正数M_n，使

$$|f_n(x)|\leqslant M_n(a\leqslant x\leqslant b).$$

由$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$F(x)$，存在N，使当$n\geqslant N$时，

$$|F(x)-f_n(x)|<1(a\leqslant x\leqslant b).$$

从而 $|F(x)|<|f_n(x)|+1\leqslant M_n+1(n\geqslant N,a\leqslant x\leqslant b)$,

特别有 $|F(x)|<M_N+1(a\leqslant x\leqslant b)$.

即知$F(x)$在$[a,b]$上有界，

由《实变函数论》中ch.5.§4.定理2可知$f_n(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续，记其不连续点集为e_n，则$me_n=0$. 记$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n$，则$mE_0=0$.

任取$x_0\in(a,b)-E_0$. 对于任意的$\varepsilon>0$，由$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$F(x)$可知，存在n_0，使得

$$|F(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}(n\geqslant n_0,a\leqslant x\leqslant b).$$

又由$f_{n_0}(x)$在x_0连续，存在$\delta>0$，使

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}(|x-x_0|<\delta).$$

从而 $|F(x)-F(x_0)|\leqslant|F(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)$

$$-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-F(x_0)|<\varepsilon$$

$$(|x-x_0|<\delta).$$

所以$F(x)$在$(a,b)-E_0$中连续，即知$F(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续。从而$F(x)$在$[a,b]$上(R)可积。

8. 康妥完全集P_0的特征函数是(R)可积的。

证 康妥完全集P_0的特征函数

$$\varphi_{P_0}(x)=\begin{cases}1, x\in P_0,\\0, x\in[0,1]-P_0.\end{cases}$$

显然$\varphi_{P_0}(x)$在$[0,1]$上有界。又由$\varphi_{P_0}(x)$在$[0,1]-P_0$上连续，而$mP_0=0$，可知$\varphi_{P_0}(x)$在$[0,1]$上几乎处处连续。从而$\varphi_{P_0}(x)$在$[0,1]$上(R)可积。

9. 如果$f(x)$在康妥集P_0中的点上等于0，而在P_0的具有长度为3^{-n}的余区间上等于n，则$\int_0^1 f(x)dx=3$。

证 $[0,1]=P_0\cup G_0$，

$$G_0=[0,1]-P_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_0^{(n)},$$

$G_0^{(n)}$为P_0关于$[0,1]$的具有长度为3^{-n}的余区间之和。记此种区间为$(\alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)})$，它共有$2^{n-1}$个。即

$$G_0^{(n)}=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(\alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)}).$$

今 $$f(x)=\begin{cases}0, x\in P_0,\\n, x\in G_0^{(n)}(n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

在[0,1]上非负可测．由积分的完全可加性，

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{P_0} f(x)dx + \int_{G_0} f(x)dx$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_0^{(n)}} f(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{\alpha_k^{(n)}}^{\beta_k^{(n)}} f(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} n \cdot 3^{-n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3.$$

10. 非负有限可测函数$f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$可和的充要条件是：

$$\sum n \cdot mE(n\leqslant f<n+1)<+\infty.$$

证 $E=[a,b]$，并记

$$E_n = E(n\leqslant f<n+1) \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

则 $E=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$，

且E_n互不相交．

又 $n \cdot mE_n \leqslant \int_{E_n} f(x)dx \leqslant (n+1) \cdot mE_n$，

从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n + mE.$$

由上式即知

$$\int_a^b f(x)dx<+\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mE_n <+\infty.$$

［注］ 那汤松《实变函数论》中此题的充要条件印为

$$\sum n\cdot mE(f\geqslant n)<+\infty,$$

这是不正确的．因充分性虽然成立，但必要性不成立．例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}(0<x\leqslant 1),\\ 0\quad (x=0).\end{cases}$$

易知$f(x)$非负可测，且由

$$[f(x)]_N=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \left(\dfrac{1}{N^2}\leqslant x\leqslant 1\right),\\ N & \left(0<x<\dfrac{1}{N^2}\right),\\ 0 & (x=0),\end{cases}$$

$$\int_0^1[f(x)]_N dx=\int_0^{\frac{1}{N^2}}N dx+\int_{\frac{1}{N^2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2-\frac{1}{N}\to 2\ (N\to+\infty),$$

可知$f(x)$可和．但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE(f\geqslant n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

11. 设$f(x)\geqslant 0$为可测函数，而$\{f(x)\}_N$是由$f(x)\leqslant N$或者$f(x)>N$而规定它等于$f(x)$或者0．如果$f(x)$几乎处处有限，则

$$\lim_{N\to\infty}\int_E\{f(x)\}_N dx=\int_E f(x)dx.$$

证 由题设$mE(f=+\infty)=0$,故

$$\int_E f(x)dx=\int_{E(f<+\infty)}f(x)dx.$$

令 $\{f(x)\}_N=\begin{cases}f(x) & (f\leqslant N),\\ 0 & (f>N).\end{cases}$

易知随着$\{N\}\uparrow\infty$时，有

$$\{f(x)\}_N\uparrow f(x)\quad (x\in E(f<+\infty)).$$

根据勒维单调收敛定理，

$$\int_{E(f<+\infty)} f(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_{E(f<+\infty)}\{f(x)\}_N dx$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_E\{f(x)\}_N dx.$$

从而有 $\int_E f(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_E\{f(x)\}_N dx.$

［注］ 题中$f(x)$几乎处处有限的条件不能去掉．例如

$$f(x)=+\infty\quad (x\in E=[0,1]).$$

对一切N，$\{f(x)\}_N\equiv 0$，从而

$$\lim_{N\to\infty}\int_E\{f(x)\}_N\,dx=0,$$

而 $\int_E f(x)dx=+\infty,$

于是 $\lim_{N\to\infty}\int_E\{f(x)\}_N\,dx\neq\int_E f(x)dx.$

12．设$f(x)$与$g(x)$是E上所定义的两个非负可测函数，置$E_y=E(g\geqslant y)$，$\Phi(y)=\int_{E_y}f(x)dx$，则

$$\int_E f(x)g(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\Phi(y)dy.$$

证 若存在$y_0>0$，使$\Phi(y_0)=+\infty$，则由$\Phi(y)$是单调下降函数可知，在$[0,y_0]$上恒有$\Phi(y)=+\infty$。

从而

$$\int_0^{+\infty}\Phi(y)\,dy\geqslant\int_0^{y_0}\Phi(y)dy=+\infty.$$

又 $$\int_E f(x)g(x)dx\geqslant\int_{E_{y_0}} f(x)g(x)dx\geqslant y_0\int_{E_{y_0}} f(x)dx$$

$$=y_0\Phi(y_0)=+\infty.$$

于是有 $$\int_E f(x)g(x)dx=\int_0^{+\infty}\Phi(y)dy.$$

下设$\Phi(y)$对任何$y>0$均为有限值．记

$$E_1=E(0\leqslant g<+\infty),E_2=E(g=+\infty).$$

则$E=E_1\cup E_2$。令

$$\{g(x)\}_N=\begin{cases}g(x) & (0\leqslant g\leqslant N),\\ 0 & (g>N).\end{cases}$$

则$\{\{g(x)\}_N\}\uparrow g(x)(x\in E_1)$。由勒维单调收敛定理，

$$\int_{E_1} f(x)g(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_{E_1} f(x)\{g(x)\}_N dx.$$

又对一切N有

$$\int_{E_1} f(x)\ \{g(x)\}_N dx=\int_E f(x)\{g(x)\}_N dx,$$

故 $$\int_{E_1} f(x)g(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_E f(x)\{g(x)\}_N dx \qquad (1)$$

对$[0,N]$作分割T：

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n<y_{n+1}=N.$$

记$\lambda_T = \max\limits_{0\leq i\leq n} \{\Delta y_i\}(\Delta y_i = y_{i+1} - y_i)$。并令

$$\varphi_T(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \chi_{e_i}(x)$$

其中$e_i = E(y_i \leqslant g < y_{i+1})$，$\chi_{e_i}$表$e_i$的特征函数。作一列分割$\{T_k\}$：$T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_k \subset \cdots$，且$\lambda_{T_k} \to 0\ (k\to\infty)$。则对应函数列$\{\varphi_{T_k}(x)\} \uparrow \{g(x)\}_N$。

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\{g(x)\}_N dx &= \lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\varphi_{T_k}(x)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k} y_i \int_E f(x)\chi_{e_i}(x)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k} y_i \int_{e_i} f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k} y_i \int_{E_{y_i}-E_{y_{i+1}}} f(x)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k} y_i[\Phi(y_i) - \Phi(y_{i+1})] \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k} \Phi(y_{i+1})\Delta y_i - N\Phi(N) \\
&= \int_0^N \Phi(y)dy - N\Phi(N) \qquad (2)
\end{aligned}$$

下面再分两种情况讨论。

（i） $\int_E f(x)g(x)dx < +\infty$。

此时必有$\int_{E_2} f(x)g(x)dx < +\infty$。从而推知$f(x)\sim 0(x\in E_2)$。

于是

$$\int_E f(x)g(x)\ dx = \int_{E_1} f(x)g(x)dx.$$

再由(1)式和(2)式，得

$$\int_E f(x)g(x)dx = \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^N \Phi(y)dy - N\Phi(N)\right]$$

又 $N\Phi(N) = \int\limits_{E(g\geqslant N)} Nf(x)dx \leqslant \int\limits_{E(g\geqslant N)} f(x)g(x)dx$

$$= \sum_{k=N}^{\infty}\ \int\limits_{E(k\leqslant g<k+1)} f(x)g(x)dx,$$

而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ \int\limits_{E(k\leqslant g<k+1)} f(x)\ g(x)dx = \int_E f(x)g(x)dx < +\infty,$

故有 $\lim\limits_{N\to\infty} N\Phi(N) = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=N}^{\infty}\ \int\limits_{E(k\leqslant g<k+1)} f(x)g(x)dx = 0$。

从而 $\int_E f(x)g(x)\ dx = \int_0^{+\infty}\Phi(y)dy$。

(ii) $\int_E f(x)g(x)dx = +\infty$。

此时只要证明$\int_0^{+\infty}\Phi(y)dy = +\infty$．由(2)式可知．对任何$N$,

$$\int_E f(x)\{g\ (x)\}_N dx \leqslant \int_0^N \Phi(y)dy.$$

从而 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_E f(x)\{g(x)\}_N dx \leqslant \int_0^{+\infty}\Phi(y)dy$.

再由(1)式,

$$\int_{E_1} f(x)\,g(x)dx \leqslant \int_0^{+\infty}\Phi(y)dy.$$

即有 $\int_E f(x)g(x)dx - \int_{E_2} f(x)\,g(x)dx \leqslant \int_0^{+\infty}\Phi(y)dy$.

如果 $mE_2=0$,或 $f\cdot g\sim 0(x\in E_2)$,则

$$\int_{E_2} f(x)g(x)dx=0.$$

从而必有

$$\int_0^{+\infty}\Phi(y)dy=+\infty.$$

如果 $mE_2\neq 0$,且 $mE_2(f\cdot g\neq 0)=\mu>0$。由前设,对任何 $y>0$, $\Phi(y)=\int_{E_y} f(x)dx<+\infty$,因此 $f(x)$ 在 E_y 上几乎处处有限。又因 $E_2(f\cdot g\neq 0)\subset E_2\subset E_y$,故知 $f(x)$ 在 $E_2(f\cdot g\neq 0)$ 上为几乎处处有限的可测函数。由鲁金定理和可测集性质可知,存在闭集 $F\subset E_2(f\cdot g\neq 0)$, $mF=\mu_0$, $0<\mu_0<\mu$,使 $f(x)$ 在 F 上连续,且 $f(x)>0$(因 $f\cdot g>0$)。因 F 为闭集,存在 $x_0\in F$,使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in F} f(x)$,从而 $f(x)\geqslant f(x_0)>0(x\in F)$。于是对任何 $y>0$,恒有

$$\Phi(y)=\int_{E_y} f(x)\,dx\geqslant\int_F f(x)dx\geqslant\int_F f(x_0)dx$$
$$=f(x_0)\mu_0.$$

从而对任何 N,恒有

$$\int_0^N\Phi(y)dy\geqslant f(x_0)\mu_0 N.$$

令$N\to+\infty$,即得

$$\int_0^{+\infty}\Phi(y)dy=+\infty.$$

总上可知,

$$\int_E f(x)g(x)dx=\int_0^{+\infty}\Phi(y)dy.$$

13. 设在[0,1]上有n个可测集$E_1,E_2,\cdots,E_n$。如果[0,1]中每一个点至少属于上述n个集中的q个集,则$E_1,E_2,\cdots,E_n$中至少有一集具有测度$\geqslant\frac{q}{n}$。

证 对任一$x\in[0,1]$,由于它至少属于q个E_k,则

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{E_k}(x)\geqslant q$$

其中φ_{E_k}表E_k的特征函数。从而

$$\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n}\varphi_{E_k}(x)\right]dx\geqslant\int_0^1 q dx=q.$$

又 $$\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n}\varphi_{E_k}(x)\right]dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\varphi_{E_k}(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}mE_k$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}mE_k\geqslant q.$$

由此即知E_k中至少有一个测度$\geqslant\frac{q}{n}$。因否则,$mE_k<\frac{q}{n}$ ($k=1,\cdots,n$),则$\sum_{k=1}^{n}mE_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{q}{n}=q$。此与$\sum_{k=1}^{n}mE_k\geqslant q$相矛盾。

14. 设$f(x)$是$[a,b]$上定义的可和函数。又设α是一如下的

常数：$0<\alpha<b-a$。如果对于每一个测度为 d 的集e，有关系 $\int_e f(x)dx=0$，则$f(x)\sim 0$。

证 记$E=[a,b]$，$E_+=E(f>0)$，$E_-=E(f<0)$。今要证 $mE_+=mE_-=0$。如不然，则有且仅有如下三种情形：

（i） $mE_+>0, mE_-=0$。即$f(x)$在E上几乎处处非负。

由$0<\alpha<b-a$。存在自然数n，使

$$n\alpha<b-a\leqslant(n+1)\alpha。$$

则 $E=[a,a+\alpha]\cup\cdots\cup[a+(n-1)\alpha,a+n\alpha]\cup[b-\alpha,b]$

$$\int_{E+}f(x)dx=\int_E f(x)dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\alpha}^{a+k\alpha}f(x)dx$$

$$+\int_{b-\alpha}^{b}f(x)dx。$$

由题设条件

$$\int_{a+(k-1)\alpha}^{a+k\alpha}f(x)dx=0\quad(k=1,\cdots,n),\int_{b-\alpha}^{b}f(x)dx=0。$$

即知$\int_{E+}f(x)dx=0$。由《实变函数论》 ch.6. §1. 定理6，$f(x)$在E_+上对等于0，此与$mE_+>0$相矛盾。故知此种情况不可能。

（ii） $mE_+=0, mE_->0$。即$f(x)$在E上几乎处处非正。

考虑$-f(x)$，并利用(i)的结果，即知此种情形同样不可能。

（iii） $mE_+>0, mE_->0$。

取正数μ满足：

$$0<\mu<\min\{mE_+,mE_-,\alpha,(b-a)-\alpha\}$$

根据第三章习题第12题的结论，存在集$E_1\subset E_+$，$E_2\subset E_-$，使$mE_1=mE_2=\mu$。又由

$$m(E-E_1-E_2)=(b-a)-\mu-\mu>a-\mu(>0),$$

可知存在集$E_3\subset E-E_1-E_2$,使$mE_3=a-\mu$。从而

$$m(E_1\cup E_3)=a, m(E_2\cup E_3)=a.$$

由题设条件,

$$\int_{E_1\cup E_3}f(x)dx=\int_{E_1}f(x)dx+\int_{E_3}f(x)dx=0,$$

$$\int_{E_2\cup E_3}f(x)dx=\int_{E_2}f(x)dx+\int_{E_3}f(x)dx=0.$$

从而 $\int_{E_1}f(x)dx=\int_{E_2}f(x)dx.$

但是,易知$\int_{E_1}f(x)dx>0$。因如果$\int_{E_1}f(x)dx=0$。则由$E_1\subset E(f>0)$可知$f(x)$在E_1上对等于0。此与$mE_1=\mu>0$相矛盾。同理可知$\int_{E_2}f(x)dx<0$。这就产生了矛盾.故此种情况亦不可能。

综上即得$mE_+=mE_-=0$。亦即$f(x)\sim 0$。

15. 设$f(x)$在$[a,b]$上可和,而在$[a,b]$之外等于0。设

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x-h}f(t)dt.$$

则 $\int_a^b|\varphi(x)|dx\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.$

证 先考虑较特殊的情形。

(i) 设$f(x)$在$[a, b]$上连续。

$$\int_a^b|\varphi(x)|dx=\int_a^b\frac{1}{2h}\left|\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt\right|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dtdx$$

$$\xlongequal{t=x+u}\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{-h}^h|f(u+x)|dudx$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^h\int_a^b|f(u+x)|dxdu$$

$$\xlongequal{v=u+x}\frac{1}{2h}\int_{-h}^h\int_{a+u}^{b+u}|f(v)|dvdu.$$

因$f(x)$在$[a, b]$之外等于0，故有

$$\int_{a+u}^{b+u}|f(v)|dv\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.$$

从而有 $\displaystyle\int_a^b|\varphi(x)|dx\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^h\int_a^b|f(x)|dxdu=\int_a^b|f(x)|dx.$

(ii) 设$f(x)$在$[a, b]$上有界可测.

记 $E=[a, b]$，由鲁金定理，对于任意$\varepsilon>0$，存在$F(x)\in C[a, b]$，使$mE(f\neq F)<\varepsilon$，且$\max\limits_{x\in E}\{|f(x)|, |F(x)|\}\leqslant K$. 记$E(f\neq F)=E_\varepsilon$，$E-E_\varepsilon=E_\varepsilon^c$，则

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_{E_\varepsilon^c}|f|dx+\int_{E_\varepsilon}|f|dx\geqslant\int_{E_\varepsilon^c}|F|dx$$

$$+\int_{E_\varepsilon}|F|dx-\int_{E_\varepsilon}|f-F|dx\geqslant\int_E|F|dx-2K\varepsilon.$$

记 $\displaystyle\varphi_F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|F(x)|dx,$

由 (i) 的结论，有

$$\int_a^b|\varphi_F(x)|dx\leqslant\int_a^b|F(x)|dx,$$

从而有 $\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx\geqslant\int_a^b|\varphi_F(x)|dx-2K\varepsilon.$

又 $\int_a^b|\varphi_F(x)|dx=\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|F(t)|dtdx$

$$\geqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dtdx$$

$$-\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)-F(t)|dtdx\geqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dtdx$$

$$-\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{E_\varepsilon}|f(t)-F(t)|dtdx$$

$$\geqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dtdx$$

$$-\frac{b-a}{2h}\cdot 2K\varepsilon$$

于是 $\int_a^b|f(x)|dx\geqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dtdx$

$$-2K\varepsilon\left(1+\frac{b-a}{2h}\right).$$

由ε的任意性，即得

$$\int_a^b|f(x)|dx\geqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dtdx\geqslant\int_a^b|\varphi(x)|dx.$$

(iii) 设$f(x)$在$[a, b]$上可和。

令 $$[f(x)]_N=\begin{cases}f(x) & (|f(x)|\leqslant N),\\ N & (f(x)>N),\\ -N & (f(x)<-N).\end{cases}\quad (N=1, 2, \cdots),$$

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}[f(t)]_N dt\quad (N=1, 2, \cdots).$$

$[f(x)]_N$在$[a, b]$上有界可测，由(ii)的结论，

$$\int_a^b |\varphi_N(t)|dx \leqslant \frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h} |[f(t)]_N| dtdx$$

$$\leqslant \int_a^b |[f(x)]_N| dx.$$

易知 $\{|[f(x)]_N|\} \uparrow |f(x)|$,

$$\left\{\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |[f(t)]_N| dt\right\} \uparrow \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dt.$$

由勒维单调收敛定理,

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b |[f(x)]_N| dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h} |[f(t)]_N| dtdx = \frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dtdx.$$

故有 $\frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dtdx \leqslant \int_a^b |f(x)| dx.$

从而得知

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx \leqslant \frac{1}{2h}\int_a^b\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| dtdx \leqslant \int_a^b |f(x)| dx.$$

16. 设$f(x)$是在$[a,b]$上定义的可和函数。如果对于$[a,b]$中任意的 c 有$\int_a^c f(x)dx = 0$的话，则$f(x)\sim 0$。

证 根据题设，对任意区间$(\alpha, \beta)\subset(a, b)$,

恒有 $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\alpha f(x)dx = 0.$

因$f(x)\in L[a, b]$，由积分的绝对连续性，对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对任一$e\subset[a,b]$，当 $me<\delta$时，$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon$.

对于任一可测集$A\subset(a,b)$，存在开集G，使$A\subset G\subset(a,b)$，

且$m(G-A)<\delta$。从而

$$\left|\int_{G-A} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

设 $G=\bigcup_i(\alpha_i,\ \beta_i)$，$(\alpha_i,\ \beta_i)$为$G$的构成区间，

则 $\int_G f(x)dx=\sum_i\int_{\alpha_i}^{\beta_i}f(x)dx=0$。

又 $\int_G f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_{G-A}f(x)dx$，

故有 $\left|\int_A f(x)dx\right|=\left|\int_{G-A}f(x)dx\right|<\varepsilon$。

再由ε可任意小，

$$\int_A f(x)dx=0.$$

即知对于$E=[a,\ b]$中的任一可测集A有$\int_A fdx=0$。 特别的有

$$\int_{E(f>0)}f(x)dx=0,\quad \int_{E(f<0)}f(x)dx=0.$$

即得$f(x)\sim 0$。

17. 设在$[a,\ b]$上，已给可和正函数$f(x)$，设$0<q\leqslant b-a$，$e\subset[a,\ b]$，$me\geqslant q$，S为所有这种可测子集的全体。证明

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\}>0.$$

证法一 因$f(x)>0(x\in[a,\ b])$，则必有

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\}\geqslant 0.$$

如果 $\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\}=0$。则对于任一正整数$k$，存在 $e_k\in S$，

使得

$$\int_{e_k} f(x)dx < \frac{1}{2^k}.$$

令 $$Q = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} e_k,$$

由 $me_k \geqslant q$ 可知

$$mQ = \lim_{n\to\infty}\left(m\bigcup_{k=n}^{\infty} e_k \right) \geqslant q > 0.$$

又对任何正整数 n，有

$$\int_Q f(x)dx \leqslant \int_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} e_k} f(x)dx \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\int_{e_k} f(x)dx$$

$$< \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

令 $n\to\infty$ 即得

$$\int_Q f(x)dx = 0.$$

由此可知 $f(x)\sim 0$ $(x\in Q)$.

此与题设 $f(x)$ 为正函数相矛盾．故必有

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\} > 0.$$

证法二　$f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可和，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为几乎处处有限的可测函数．由鲁金定理和可测集性质，存在闭集 $F\subset[a,\ b]$，使 $m([a,\ b]-F) < q/2$，$f(x)$ 在 F 上连续．从而存在 $x_0\in F$，使 $f(x_0) = \inf\limits_{x\in F} f(x)$，由 $f(x) > 0\,(a\leqslant x\leqslant b)$ 知 $f(x_0) > 0$．即有 $f(x)\geqslant f(x_0) > 0\,(x\in F)$.

对任意的 $e\in S$，由

$$e\cap F=e\cap([a,\ b]-C_{[a,b]}F)=e-(e\cap C_{[a,b]}F),$$

$$m(e\cap F)=me-m(e\cap C_{[a,b]}F)$$

$$\geqslant me-m(C_{[a,b]}F)\geqslant q-\frac{q}{2}=\frac{q}{2}.$$

有 $\int_e f(x)dx\geqslant\int_{e\cap F}f(x)dx\geqslant\int_{e\cap F}f(x_0)dx$

$$\geqslant f(x_0)\cdot m(e\cap F)\geqslant\frac{q}{2}\cdot f(x_0).$$

从而有 $\inf\limits_{e\in S}\left\{\int_e f(x)dx\right\}\geqslant\frac{q}{2}f(x_0)>0.$

18. 设$M=\{f(x)\}$是在$[a,\ b]$上为可和的函数族。如果M有等度的绝对连续积分，那么存在着如下的单调增加的正函数$\Phi(u)$ $(u\geqslant0)$，

$$\lim_{u\to+\infty}\Phi(u)=+\infty,$$

且 $\int_a^b|f(x)|\cdot\Phi(|f(x)|)dx\leqslant A<+\infty$

对于M中任何函数$f(x)$成立，其中A是一个与$f(x)$无关的数。

证 首先由等度绝对连续积分的条件导出M中函数在$[a,\ b]$上积分的一致有界性。

对于给定的$\varepsilon_0>0$，存在$\delta_0>0$，对任何$e\subset[a,\ b]$，当$me<\delta_0$时，对M中一切f，恒有

$$\int_e|f(x)|dx<\varepsilon_0.$$

将$[a,\ b]$等分为N个小区间：$\Delta_k(k=1,\ \cdots,\ N)$，$N$充分大，使

$m\Delta_k<\delta_0$。$[a, b]=\bigcup_{k=1}^{N}\Delta_k$。于是对任一$f\in M$,均有

$$\int_a^b |f|\,dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Delta_k}|f|\,dx<N\varepsilon_0=B\ (<+\infty).$$

任给 $\varepsilon>0$，由 M 具有等度绝对连续积分，存在 $\delta>0$，当 $e\subset E\triangleq[a, b]$，$me<\delta$时，

$$\int_e |f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}\quad (f\in M).$$

又
$$\sum_{n=N}^{\infty}n\cdot mE(n\leqslant|f|<n+1)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\int_{E(n\leqslant|f|<n+1)}|f|\,dx$$
$$=\int_{E(|f|\geqslant N)}|f|\,dx\quad (e\in M).$$

而
$$mE\,(|f|\geqslant N)=\int_{E(|f|\geqslant N)}dx\leqslant\frac{1}{N}\int_{E(|f|\geqslant N)}|f|\,dx$$
$$\leqslant\frac{1}{N}\int_E|f|\,dx<\frac{B}{N}\quad (f\in M).$$

取 $N=max\left\{\frac{B}{\delta}, \frac{2B}{\varepsilon}\right\}$，则

$$\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)mE(n\leqslant|f|<n+1)\leqslant\int_{E(|f|\geqslant N)}|f|\,dx$$
$$+mE(f\geqslant N)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad (f\in M).$$

于是，可找出一列正整数$\{N_k\}\uparrow+\infty$，使得

$$\sum_{n=N_k}^{\infty}(n+1)mE(n\leqslant|f|<n+1)<\frac{1}{2^k}(f\in M).$$

从而有

$$\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1}(n+1)mE(n\leqslant|f|<n+1)<\frac{1}{2^k}(f\in M)(k=1,2\cdots)$$

今作函数$\Phi(u)(u\geqslant 0)$如下：

$$\Phi(u)=\begin{cases}1 & (0\leqslant u\leqslant N_1),\\ k & (N_k<u\leqslant N_{k+1})(k=1,\ 2,\ \cdots).\end{cases}$$

显然$\Phi(u)\uparrow+\infty$，且易知

$$E_n\triangleq E(n\Phi(n)\leqslant|f(x)|\Phi(|f(x)|)<(n+1)\Phi(n+1))$$
$$=E(n\leqslant|f(x)<n+1).$$

从而 $$\int_a^b|f(x)|\Phi(|f(x)|)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|$$

$$\Phi(|f(x)|)dx\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Phi(n+1)mE_n$$

$$=\sum_{n=0}^{N_1}(n+1)mE_n+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1}(n+1)\Phi(n+1)mE_n$$

$$=A_1+\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1}(n+1)mE(n\leqslant|f|<n+1)$$

$$\leqslant A_1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=A_1+A_2=A\quad(f\in M).$$

其中A为与f无关的常数。

19. 如果$f(x)$在$[a,\ b]$上可和，那末对于任意的$\varepsilon>0$，存在着$[a,\ b]$上的连续函数$\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon.$$

证 记

$$[f(x)]_N=\begin{cases} f(x)(|f(x)|\leqslant N), \\ N \quad (f(x)>N), \\ -N(f(x)<-N), \end{cases} \qquad x\in E\triangleq[a,\ b]$$

则 $\int_a^b |f(x)-[f(x)]_N|dx\leqslant \int\limits_{E(|f|>N)} (|f(x)|+N)dx$

$$\leqslant 2\int\limits_{E(|f|>N)} |f(x)|dx.$$

因$|f(x)|\in L[a,\ b]$，故任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$,使对于任何$e\subset E$，只要$me<\delta$，便有

$$\int_e |f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

又知 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(|f|>n)=E(|f|=+\infty)$,

并注意到$|f(x)|$在E上几乎处处有限，便可得

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f|>n)=mE(|f|=+\infty)=0.$$

从而，对上述δ，存在N，使$mE(|f|>N)<\delta$,

于是 $\int\limits_{E(|f|>N)} |f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}.$

从而 $\int_a^b |f(x)-[f(x)]_N|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$

对于$[f(x)]_N$，根据鲁金定理，存在$[a,\ b]$上的连续函数$\varphi(x)$，使 $mE([f]_N\neq\varphi)<\frac{\varepsilon}{4N}$，且$|\varphi(x)|\leqslant N$。则

$$\int_a^b |[f]_N-\varphi|dx=\int\limits_{E([f]_N\neq\varphi)} |[f]_N-\varphi|dx$$

$$\leqslant 2N \cdot mE([f]_N \neq \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $\displaystyle\int_a^b |f-\varphi|dx \leqslant \int_a^b |f-[f]_N|dx +$

$$\int_a^b |[f]_N - \varphi|dx < \varepsilon.$$

20. 如果$f(x)$在$[a,b+\delta](\delta>0)$上可和，则

$$\lim_{h\to+0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0.$$

证 任给$\varepsilon>0$，由$f(x)\in L[a,\ b+\delta]$和题19的结论，存在$\varphi(x)\in C[a,\ b+\delta]$，使

$$\int_a^{b+\delta} |f(x)-\varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又由$\varphi(x)$在$[a,\ b+\delta]$上一致连续知，存在$\eta>0$，(取$\eta\leqslant\delta$)，使当$0<h<\eta$时，对一切$x\in[a,\ b]$，

恒有 $\displaystyle|\varphi(x+h)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$

从而 $\displaystyle\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx \leqslant \int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx$

$$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx + \int_a^b |\varphi(x)-f(x)|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

即知 $\displaystyle\lim_{h\to+0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0.$

21. 设在$[a, b]$上给定可测函数$f(x)>0$，则关系式

$$\int_a^b [f(x)]_{2n} dx - \int_a^b [f(x)]_n dx \to 0 \quad (n\to\infty)$$

与$n\cdot mE(f>n)\to 0$是等价的。

证 由

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & (f\leqslant n), \\ n & (f>n), \end{cases}$$

$$[f(x)]_{2n} = \begin{cases} f(x) & (f\leqslant 2n), \\ 2n & (f>2n), \end{cases}$$

可知 $$[f(x)]_{2n} - [f(x)]_n = \begin{cases} 0 & (0<f\leqslant n), \\ f(x)-n & (n<f\leqslant 2n), \\ n & (f>2n) \end{cases}$$

从而 $$n\cdot mE(f>2n)\leqslant \int_a^b [f]_{2n} dx - \int_a^b [f]_n dx \leqslant n\cdot mE(f>n). \qquad (1)$$

于是，如果$n\cdot mE(f>n)\to 0(n\to\infty)$，则由(1)知必有

$$\int_a^b [f]_{2n} dx - \int_a^b [f]_n dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

反之，如果

$$\int_a^b [f]_{2n} dx - \int_a^b [f]_n dx \to 0 \quad (n\to\infty),$$

则由(1)知

$$n\cdot mE(f>2n)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

即有 $$2n\cdot mE(f>2n)\to 0 \quad (n\to\infty) \qquad (2)$$

又由$E(f>2n+1)\subset E(f>2n)$,

$$(2n+1)\cdot mE(f>2n+1)\leqslant\frac{2n+1}{2n}[2n\cdot mE(f>2n)],$$

可知 $(2n+1)\cdot mE(f>2n+1)\to 0 \quad (n\to\infty)$。 (3)

综合(2)、(3)即得

$$n\cdot mE(f>n)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

22. 设在$[a, b]$上给定可测函数$f(x)>0$与$g(x)>0$。如果存在着有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\{[f(x)]_n-[g(x)]_n\}dx,$$

又$n\cdot mE(f>n)\to 0$，则$n\cdot mE(g>n)\to 0$。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\{[f(x)]_n-[g(x)]_n\}dx=l<+\infty$。

则 $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b\{[f]_{2n}-[g]_{2n}\}dx-\int_a^b\{[f]_n-[g]_n\}dx\right)$$
$$=l-l=0.$$

即有 $$\left(\int_a^b[f]_{2n}dx-\int_a^b[f]_n dx\right)-\left(\int_a^b[g]_{2n}dx-\right.$$
$$\left.-\int_a^b[g]_n dx\right)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

如果 $n\cdot mE(f>n)\to 0 \quad (n\to\infty)$，

由题21结论知

$$\int_a^b[f]_{2n}dx-\int_a^b[f]_n dx\to 0 \quad (n\to\infty).$$

从而必有

$$\int_a^b[g]_{2n}dx-\int_a^b[g]_n dx\to 0 \quad (n\to\infty).$$

再利用题21结论，即得

$$n\cdot mE(g>n)\to 0\quad (n\to\infty).$$

23. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上处处存在有限导数（在端点a，b处指单方导数），且$f'(x)$在$[a, b]$上(R)可积，则

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

证 任取$x\in[a, b]$。对于$[a, x]$的任一分割T：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=x,$$

$$f(x)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})].$$

由$f(x)$在$[a, b]$上可导，根据微分中值定理，

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$
$$(x_{i-1}<\xi_i<x_i,\ i=1, 2, \cdots, n).$$

从而 $$f(x)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\Delta x_i\quad (\Delta x_i=x_i-x_{i-1}).$$

记分割T的最大子区间的长度为$l(T)$。令$l(T)\to 0$，上式两端取极限，得

$$f(x)-f(a)=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\Delta x_i.$$

由$f'(x)$在$[a, b]$上(R)可积，

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^x f'(t)dt.$$

所以 $$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt\quad (a<x\leqslant b).$$

当$x=a$时，上式显然也成立。即得

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

24. 设$f(x)$在E上可和，$E_k\subset E(k=1,2,\cdots)$均为可测集，且

$$\lim_{k\to\infty} mE_k=mE(<+\infty),$$

则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx=\int_E f(x)dx$.

证 由$E_k\subset E$及$\lim\limits_{k\to\infty} mE_k=mE<+\infty$，有

$$\lim_{k\to\infty} m(E-E_k)=mE-\lim_{k\to\infty} mE_k=0.$$

由$f(x)$可和与积分的绝对连续性可知

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E-E_k} f(x)dx=0.$$

再由 $\int_{E_k} f(x)dx+\int_{E-E_k} f(x)dx=\int_E f(x)dx$,

即可得出

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

25. 求积分

(i) $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx$；(ii) $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$.

解 (i) 当$0<x<1$时，

$$\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k}.$$

令 $u_k(x)=\frac{x^{k-1}}{k}$， $F(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}$.

显然$u_k(x)$在[0，1]上非负可测，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=F(x)\quad(0<x<1).$$

由《实变函数论》ch.6.§1.定理11，

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 u_k(x)dx$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{k-1}}{k}dx=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

又(参见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》§420)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

即得 $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=-\frac{\pi^2}{6}$.

(ii)当$0<x<1$时，

$$\frac{\ln x}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}x^k\ln x.$$

$u_k(x)=x^k\ln x$在(0，1)上可测且都是负的，由《实变函数论》ch.6.§1.定理11，可以推知

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^k\ln x dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^{k+1}\left(\frac{\ln x}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\right]_0^1=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$=-\frac{\pi^2}{6}.$$

26. 设$f(x)$在$[a, b]$上可和，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在$[a, b]$上的阶梯函数$s(x)$，使得

$$\int_a^b |f(x)-s(x)|dx<\varepsilon.$$

证 由$f(x)\in L[a, b]$，据题19的结论，存在函数$\varphi(x)\in C[a, b]$使得

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由$\varphi(x)$在$[a, b]$上一致连续，存在$[a, b]$的一个充分细的分法：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使$\varphi(x)$在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$$(i=0, 1, \cdots, n-1)$上的振幅小于$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

今作阶梯函数如下：

$$s(x)=\begin{cases}C_1, & x\in[x_0, x_1],\\ C_{i+1}, & x\in(x_i, x_{i+1}]\ (i=1, \cdots, n-1),\end{cases}$$

其中C_i满足

$$\min_{x\in[x_i, x_{i+1}]}\varphi(x)\leqslant C_{i+1}\leqslant\max_{x\in[x_i, x_{i+1}]}\varphi(x)\ (i=0, \cdots, n-1).$$

于是
$$\int_a^b|\varphi(x)-s(x)|dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\varphi(x)-C_{i+1}|dx$$
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx=\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而有 $\int_a^b |f(x)-s(x)|dx \leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx$

$$+\int_a^b |\varphi(x)-s(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

27. 设$f(x)$在$[a,\ b]$上可和，则有

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos tx\,dx=0.$$

证 由前题结论，对任意$\varepsilon>0$，存在$[a,\ b]$上的阶梯函数

$$s(x)=\begin{cases}C_1, & x\in[x_0,\ x_1],\\ C_{i+1}, & x\in(x_i,\ x_{i+1}]\ (i=1,\ \cdots,\ n-1),\end{cases}$$

使得 $\int_a^b |f(x)-s(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$.

而 $$\int_a^b s(x)\cos tx\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_{i+1}\cos tx\,dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} C_{i+1}\cdot\frac{\sin tx_{i+1}-\sin tx_i}{t}.$$

$$\left|\int_a^b s(x)\cos tx dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2|C_{i+1}|}{|t|}.$$

显然 $s(x)$在$[a,\ b]$上有界，设$|s(x)|\leqslant M$. 取$T>\frac{4nM}{\varepsilon}$,

则当$|t|>T$时，

$$\left|\int_a^b s(x)\cos tx\,dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2|C_{i+1}|}{T} < \frac{2nM}{T} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当$|t|>T$时有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos tx\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b (f(x)-s(x))\cos tx dx\right|$$

$$+\left|\int_a^b s(x)\cos tx\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-s(x)|dx$$

$$+\left|\int_a^b s(x)\cos tx\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即知 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos tx\,dx=0$。

28. 设$f(x)$在$[a,\ b]$上可和，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\cos nx|dx=\int_a^b f(x)dx.$$

证 (*i*) 当$f(x)=C$(常数)时，命题成立。

因 $\frac{\pi}{2}\int_a^b C|\cos nx|dx=\frac{\pi}{2}\cdot C\cdot\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}|\cos x|dx$

$$=\frac{\pi C}{2n}\left(\int_0^{\left[\frac{n(b-a)}{\pi}\right]\pi}|\cos x|dx+\alpha\right)$$

$$=\frac{\pi C}{2n}\left(\left[\frac{n(b-a)}{\pi}\right]\cdot 2+\alpha\right)\qquad (0<\alpha\leqslant 2).$$

对任一正数p，易知$\frac{[np]}{n}\to p(n\to\infty)$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b C|\cos nx|dx=\pi C\cdot\frac{b-a}{\pi}+0=C(b-a).$$

(*ii*) 当$f(x)=s(x)$(阶梯函数)时，命题成立。

设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$,

$s(x)=C_i,\ x\in(x_{i-1},\ x_i]\qquad (i=1,\ \cdots,\ k)$。

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b s(x)|\cos nx|dx=\sum_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_i|\cos nx|dx$$

$$=\sum_{i=1}^{k} C_i(x_i-x_{i-1})=\int_a^b s(x)dx.$$

(*iii*) 当$f(x)\in L[a, b]$时，命题成立。

对于任意的$\varepsilon>0$，由题26的结论，存在$[a, b]$上的阶梯函数$s(x)$，使得

$$\int_a^b |f(x)-s(x)|dx<\frac{\varepsilon}{6}.$$

又由(*ii*) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b s(x)|\cos nx|dx=\int_a^b s(x)dx.$$

故存在N，当$n\geqslant N$时，有

$$\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b s(x)|\cos nx|dx-\int_a^b s(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当$n\geqslant N$时，有

$$\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\cos nx|dx-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$=\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b (f(x)-s(x))|\cos nx|dx\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_a^b s(x)|\cos nx|dx-\int_a^b s(x)dx+\int_a^b s(x)dx$$

$$\left.-\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\int_a^b |f(x)-s(x)|dx$$

$$+\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b s(x)|\cos nx|dx-\int_a^b s(x)dx\right|$$

$$+\int_a^b |s(x)-f(x)|dx \leqslant 3\int_a^b |f(x)-s(x)|dx$$

$$+\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b s(x)|\cos nx|dx-\int_a^b s(x)dx\right|$$

$$<3\cdot\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\cos nx|dx=\int_a^b f(x)dx.$



第六章　平方可和函数

本章内容　线性赋范空间、度量空间、平方可和函数空间L_2的定义；柯西——布涅可夫斯基不等式，霍尔德不等式，闵可夫斯基不等式；平均收敛的定义、性质及其与度量收敛、弱收敛的关系；L_2空间的完备性和处处稠密的函数类；L_2空间的标准正交系、封闭系和完全系、贝赛尔不等式，巴赛瓦尔封闭性方程；l_2空间的定义、性质及其与L_2空间的同构性；线性独立系的斯密特正交化方法；L_p与l_p空间($p>1$)。

1．设$\{f_n(x)\}$是L_2中度量收敛于$F(x)$的函数列．若$\|f_n\|\leqslant K$，则$\{f_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$．

证　要证：对任意$g\in L_2$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\cdot g dx=\int_E f\cdot g dx.$$

(1)　$\|F\|\leqslant K$．

由$f_n\Longrightarrow F$，$f_n{}^2\Longrightarrow F^2$，应用法都引理有

$$\int_E F^2 dx\leqslant \sup_n\left\{\int_E f_n^2 dx\right\}\leqslant K^2,$$

所以有$\|F\|\leqslant K$．

(2)　对任意$g\in L_2$，$\{f_n g\}$在E上具有等度绝对连续的积分．

因为对任何可测集$e\subset E$,

$$\left|\int_e f_n\cdot g dx\right|\leqslant\sqrt{\int_e f_n^2 dx}\cdot\sqrt{\int_e g^2 dx}$$

$$\leqslant\|f_n\|\cdot\sqrt{\int_e g^2 dx}\leqslant K\cdot\sqrt{\int_e g^2 dx}.$$

由于g^2在E上的积分具绝对连续性，K为与n无关的有限常数，知$\{f_n g\}$在E上具有等度绝对连续的积分.

(3) 由于$\{f_n g\}$为可和函数列，$f_n\cdot g\Longrightarrow F\cdot g$，$\{f_n\cdot g\}$在$E$上具有等度绝对连续的积分. 应用维他利定理便有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\cdot g dx=\int_E F\cdot g dx.$$

而g为L_2中任一函数，这就说明$\{f_n(x)\}$弱收敛于$F(x)$.

［注］设$\{f_n\}$为$L_p(p>1)$中函数列，$f_n\Longrightarrow F$. 若$\|f_n\|_p\leqslant K$，则$\{f_n\}$弱收敛于$F(x)$.

证 要证对任意$g\in L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\cdot g dx=\int_E F\cdot g dx.$$

(1) $F\in L_p$，$\|F\|_p\leqslant K$.

由$f_n\Longrightarrow F$，必有$f_{n_i}\longrightarrow F(a\cdot e\cdot)$，$f_{n_i}^p\longrightarrow F^p(a\cdot e\cdot)$，$|f_{n_i}|^p\longrightarrow|F|^p(a\cdot e\cdot)$. 由法都引理有

$$\int_E|F|^p dx\leqslant\sup_{n_i}\left\{\int_E|f_{n_i}|^p dx\right\}\leqslant K^p.$$

即$\|F\|_p\leqslant K$，$(F\in L_p)$.

(2) $\{f_n\cdot g\}$在E上具有等度绝对连续积分.

对任意可测集$e\subset E$，有

$$\left|\int_e f_n\cdot g dx\right|\leqslant\left(\int_e |f_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_e |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\|f_n\|\cdot\left(\int_e |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant K\cdot\left(\int_e |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由于$|g|^q$在E上的积分具有绝对连续性，便知$\{f_n g\}$在E上的积分具有等度绝对连续性。

(3) 由于$\{f_n g\}$为L中可和函数列，$\{f_n\cdot g\}$在E上具有等度绝对连续积分，$f_n\cdot g\Longrightarrow F\cdot g$，应用维他利收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\cdot g dx=\int_E F\cdot g dx.$$

2. 如果函数列$\{f_n(x)\}$在L_2中弱收敛于$F(x)$，则$\|f_n\|\leqslant K$。

证 先证明一个定理。

定理 设$A_n(g)$是巴拿赫空间X上的线性有界泛函序列。若序列$\{A_n(g)\}$对任何$g\in$ X都收敛或有界，则$\{A_n(g)\}$必在单位球$\{g: \|g\|\leqslant 1\}$上一致有界。

证 ①设$f_i\in$ X，

$$O_{r_i}(f)=\{f|\ \|f-f_i\|\leqslant r_i\}\quad(r_i>0)$$

为X中一串闭球。若$O_{r_1}(f_1)\supset O_{r_2}(f_2)\supset\cdots\supset O_{r_i}(f_i)\supset\cdots$，$r_i\to 0$，则必有$f_0\in$ X使

$$f_0\in\bigcap_{i=1}^{\infty}O_{r_i}(f_i).$$

因为，由$f_{n+p}\in O_{r_{n+p}}(f_{n+p})\subset O_{r_n}(f_n)$推知$\|f_{n+p}-f_n\|\leqslant$

$r_n \to 0$，$(n\to\infty)$，即$\{f_n\}$为X中基本序列．必有$f_0\in X$使

$$\| f_n - f_0 \| \to 0,\ (n\to\infty).$$

对任意N，当n充分大时有$\| f_n - f_N \| \leqslant r_N$，令$n\to\infty$得：$\| f_0 - f_N \| \leqslant r_N$。

从而有

$$f_0 \in O_{r_N}(f_N).$$

而N是任意的，有

$$f_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} O_{r_i}(f_i).$$

②$\{A_n(g)\}$必在X中某一球上一致有界。

若不然，$\{A_n(g)\}$不在X中任何球上一致有界。

由于$\{A_n(g)\}$不在X中一致有界，必存在$g_1\in X$和n_1使得

$$|A_{n_1}(g_1)| > 1.$$

由$A_{n_1}(g)$的连续性，有闭球$O_{r_1}(g_1)$$(r_1<1)$使得

$$|A_{n_1}(g)| > 1,\ (g\in O_{r_1}(g_1)).$$

而$\{A_n(g)\}$也不在$O_{r_1}(g_1)$上一致有界。又有$g_2\in O_{r_1}(g_1)$，(可取g_2为$O_{r_1}(g_1)$的内点)，$n_2(n_2>n_1)$使得

$$|A_{n_2}(g_2)| > 2.$$

由$A_{n_2}(g)$的连续性，g_2是$O_{r_1}(g_1)$的内点可知，存在闭球$O_{r_2}(g_2)\subset O_{r_1}(g_1)\left(r_2<\frac{1}{2}\right)$使得

$$|A_{n_2}(g)| > 2,\ (g\in O_{r_2}(g_2)).$$

如此继续下去，有$\{n_i\}\uparrow+\infty$，$r_i\to 0$，$O_{r_1}(g_1)\supset O_{r_2}(g_2)\supset\cdots\supset O_{r_i}(g_i)\supset\cdots$使

$$|A_{n_i}(g)|>i,\quad (g\in O_{r_i}(g_i)).$$

由①知有$g_0\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}O_{r_i}(g_i)$。对$g_0$有

$$|A_{n_i}(g_0)|>i,\quad (\text{一切}i).$$

这说明$\{A_n(g_0)\}$无界．与假设矛盾．

从而知必有某球，设为

$$O_\rho(g^*)=\{g^*+\rho g,\ \|g\|\leqslant 1\},\ (\rho>0)$$

使$\{A_n(g)\}$对于$O_\rho(g^*)$一致有界．即存在有限常数C_1使得

$$|A_n(g^*+\rho g)|\leqslant C_1,\quad (\text{一切}n,\ \|g\|\leqslant 1).$$

从而对$\|g\|\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}|A_n(g)|&=\frac{1}{\rho}|A_n(g^*+\rho g)-A_n(g^*)|\\&\leqslant\frac{1}{\rho}(|A_n(g^*+\rho g)|+|A_n(g^*)|)\leqslant\frac{2C_1}{\rho}\\&=C\ (\text{一切}n,\ \|g\|\leqslant 1).\end{aligned}$$

即存在常数C使

$$|A_n(g)|\leqslant C,\quad (\text{一切}n,\ \|g\|\leqslant 1).$$

这说明$\{A_n(g)\}$在单位球$\{g:\ \|g\|\leqslant 1\}$上一致有界．

对A_n，记

$$\|A_n\|=\sup_{\|g\|\leqslant 1}\{|A_n(g)|\}$$

由上面所证知

$$\|A_n\|\leqslant C\ (\text{一切}n).$$

下面转来证明原题．

设$\{f_n\}$在L_2中弱收敛于F．即对任何$g\in L_2$，

有 $(f_n, g) \to (F, g)$。

记 $A_n(g) = (f_n, g)$，$(g \in L_2)$。

它是L_2上的线性有界泛函序列．且对每个$g \in L_2$，$\{A_n(g)\}$都收敛．由已证明的定理知$\{A_n(g)\}$必在单位球$\{\|g\| \leqslant 1\}$上一致有界，即存在$M>0$，使

$$|A_n(g)| = |(f_n, g)| \leqslant M \quad (\text{一切}n, \ \|g\| \leqslant 1).$$

从而 $\|A_n\| = \sup\limits_{\|g\| \leqslant 1} |(f_n, g)| \leqslant M$ （一切n）。

易知 $\|f_n\| = \|A_n\| = \sup\limits_{\|g\| \leqslant 1} |(f_n, g)|$。

从而有 $\|f_n\| \leqslant M$ （一切n）。

［注］ 若$\{f_n\}$在$L_p(p>1)$中弱收敛于f，则$\|f_n\|_p \leqslant K$。

证 由假设知，对任一$g \in L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$都有

$$(f_n, g) \to (f, g) \quad (n \to \infty).$$

记 $A_n(g) = (f_n, g) \quad (g \in L_q)$。

由 $|A_n(g)| = |(f_n, g)| \leqslant \|f_n\|_p \cdot \|g\|_q$，

知$A_n(g)$都是L_q上的线性有界泛函．

由假设知线性有界泛函序列$\{A_n(g)\}$对每个$g \in L_q$都收敛．由上面所证定理可知$\{A_n(g)\}$在单位球$\{g: \|g\|_q \leqslant 1\}$上一致有界．即存在有限常数$K$使得

$$|A_n(g)| = |(f_n, g)| \leqslant K, \quad (\|g\|_q \leqslant 1, \ \text{一切}n).$$

而 $\|f_n\|_p = \sup\limits_{\|g\|_q \leqslant 1} |(f_n, g)| = \|A_n\|$，

从而有 $\|f_n\|_p \leqslant K$ （一切n）。

3. 在L_2中，弱收敛于$F(x)$的函数列$\{f_n(x)\}$未必是度量收敛。

证 考虑$L_2[-\pi, \pi]$中的函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \cdots.$$

它是$L_2[-\pi, \pi]$中的标准正交完备系。从而对任一$f\in L_2[-\pi, \pi]$有

$$\|f\|^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

其中 $a_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$,

$$a_n = \left(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right),\ b_n = \left(f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)\ (n=1,2,\cdots).$$

必有$a_n\to 0$, $b_n\to 0$ $(n\to\infty)$。即对任一$f\in L_2[-\pi, \pi]$有

$$(f, \cos nx)\to 0,\ (f, \sin nx)\to 0\ (n\to\infty).$$

这说明$\cos nx$和$\sin nx$均弱收敛于0。但并没有

$$\cos nx \Longrightarrow 0,\ \sin nx \Longrightarrow 0\ (x\in[-\pi, \pi]).$$

若不然，不妨设$\cos nx\Longrightarrow 0$，则有$\cos^2 nx\Longrightarrow 0$。又$|\cos^2 nx|\leqslant 1$，应用有界控制收敛定理有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx\to 0 \quad (n\to\infty).$$

但这与

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = \pi\ (n=1, 2, \cdots)$$

矛盾。这说明$\cos nx \Longrightarrow 0$不成立。

4. 如果$\{f_n(x)\}$在L_2中弱收敛于$F(x)$，且$\| f_n \| \to \| F \|$，则$\{f_n(x)\}$平均收敛于$F(x)$。

证

$$\| f_n - F \|^2 = \int_a^b (f_n - F)^2 dx = \int_a^b f_n^2 dx$$

$$-2\int_a^b f_n \cdot F\, dx + \int_a^b F^2 dx.$$

由题设知

$$\int_a^b f_n^2 dx = \| f_n \|^2 \to \| F \|^2 = \int_a^b F^2 dx,$$

$$\int_a^b f_n \cdot F\, dx \to \int_a^b F^2 dx.$$

从而有 $$\| f_n - F \|^2 = \int_a^b f_n^2 dx - 2\int_a^b f_n \cdot F\, dx + \int_a^b F^2 dx$$

$$\to \int_a^b F^2 dx - 2\int_a^b F^2 dx + \int_a^b F^2 dx = 0.$$

即 $\| f_n - F \| \to 0$.

[注] 只假定$\| f_n \| \to \| F \|$，推不出$\| f_n - F \| \to 0$。

取 $f_n(x) = 1 + \frac{1}{n}$，$x \in [0, 1]$

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

则f_n、F均属于$L_2[0, 1]$。且有

$$\|f_n\|^2=\int_0^1 f_n{}^2dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{n}\right)^2dx\to 1=\int_0^1F^2dx$$

$$=\|F\|^2.$$

即 $\|f_n\|\to\|F\|$.

但 $$\int_0^1(f_n-F)^2dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(1+\frac{1}{n}+1\right)^2dx\to 2.$$

即 $\|f_n-F\|$ 不趋于0.

［注］若$\{f_n\}$在 $L_p(p>1)$ 中弱收敛于f，且有 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$，则 $\|f_n-f\|_p\to 0$.

证明可参看黎茨、纳吉著"泛函分析讲义"I卷ch2. § 3.

5. 若积分$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$对$L_2$中所有函数$f(x)$存在，则$g\in L_2$.

证 (1) 若$\int_a^b f\cdot gdx$对一切$f\in L_2$存在，则积分必恒为有限。先对$f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$的情形加以证明.

记 $E_n=E(n\leqslant g<n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$

则$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}E_n=E$. 由$f\geqslant 0$，$f\in L_2(E)$有

$$\int_E f^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}f^2dx<+\infty.$$

记 $b_n=\int_{E_n}f^2dx$, $(n=0,1,2,\cdots)$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$.

若存在f($f \geqslant 0$, $f \in L_2(E)$)使

$$\int_E f \cdot g dx = +\infty.$$

则可造出$f_1 \in L_2(E)$使

$$\int_E (f_1 \cdot g)_+ dx = +\infty, \quad \int_E (f_1 \cdot g)_- dx = +\infty,$$

从而积分$\int_E f_1 \cdot g dx$不存在. 下面来造f_1.

由$\int_E f \cdot g dx = +\infty$知

$$\sum_n n \int_{E_n} f dx \leqslant \int_E f \cdot g dx = \sum_n \int_{E_n} f \cdot g dx$$

$$\leqslant \sum_n (n+1) \int_{E_n} f dx = \sum_n n \int_{E_n} f dx + \int_E f dx.$$

由$f \in L_2(E)$可知$f \in L(E)$, 即$\int_E f dx < +\infty$. 从而

有 $\sum_n n \int_{E_n} f dx = +\infty$.

记 $a_n = \int_{E_n} f dx$, 有 $\sum_n n a_n = +\infty$.

对于使得 $mE_n = 0$ 的E_n不予考虑, 只考虑使 $mE_n > 0$的E_n. 造$f_1(x)$如下:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{mE_n}, & x \in E_n', \\ \dfrac{-a_n}{mE_n}, & x \in E_n''. \end{cases}$$

其中 $mE_n>0$，取 E_n'、E_n'' 使 $E_n'\cup E_n''=E_n$，$E_n'\cap E_n''=\phi$，$mE_n'=mE_n''=\frac{1}{2}mE_n$。

记 $E'=\bigcup_n E_n'$，$E''=\bigcup_n E_n''$。

则$f_1\geqslant 0(x\in E')$，$f_1\leqslant 0(x\in E'')$。

下面来证明$f_1\in L_2(E)$，但$\int_E f_1\cdot g dx$不存在。

由 $\int_E f_1^2 dx=\sum_n\int_{E_n} f_1^2 dx=\sum_n\frac{a_n^2}{(mE_n)^2}mE_n$

$$=\sum_n\frac{a_n^2}{mE_n}.$$

而 $a_n^2=\left(\int_{E_n} f dx\right)^2\leqslant mE_n\cdot\int_{E_n} f^2 dx=mE_n\cdot b_n$。

从而有 $\int_E f_1^2 dx=\sum_n\frac{a_n^2}{mE_n}\leqslant\sum_n b_n<+\infty$。

但 $\int_E (f_1\cdot g)_+ dx=\int_{E'} f_1\cdot g dx=\sum_n\int_{E_n'} f_1\cdot g dx$

$$\geqslant\sum_n n\int_{E_n'} f_1 dx=\sum_n n\frac{a_n}{mE_n}mE_n'$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n na_n=+\infty.$$

$$\int_E (f_1\cdot g)_- dx=\int_{E''}(-f_1\cdot g)dx=\sum_n\int_{E_n''}(-f_1)g dx$$

$$\geqslant\sum_n n\int_{E_n''}(-f_1)dx=\sum_n n\frac{a_n}{mE_n}mE_n''$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n} na_n = +\infty.$$

从而 $\int_E f_1 \cdot g dx = \int_E (f_1 \cdot g)_+ dx - \int_E (f_1 \cdot g)_- dx$

$$= +\infty - (+\infty).$$

即$\int_E f_1 \cdot g dx$不存在。

以上的证明说明：当$f \geqslant 0$，$g \geqslant 0$时，若积分$\int_E f \cdot g dx$ 对任意的$f \in L_2(E)$都存在，则必恒为有限。

对一般的f、g，若$\int_E f \cdot g dx$对一切$f \in L_2$存在，则$\int_E f \cdot g_+ dx$ 也对一切$f \in L_2$存在。从而知，对任意$f \in L_2$，$\int_E f_+ \cdot g_+ dx$和$\int_E f_- \cdot g_+ dx$至少有一个为有限。而由上面的论证知两者均不会为无限，所以积分$\int_E f \cdot g_+ dx$为有限。同样，$\int_E f \cdot g_- dx$ 亦为有限。从而$\int_E f \cdot g dx$为有限。

(2) 若$(f, g) = \int_E f \cdot g dx$对一切$f \in L_2(E)$ 恒为有限，则必$g \in L_2(E)$。

由$\int_E f \cdot g dx$对一切$f \in L_2(E)$恒为有限，可知$g \in L_1(E)$，g几乎处处有限。

记 $g_n = \begin{cases} g, & |g| \leqslant n, \\ n, & |g| > n. \end{cases}$

有$g_n(x) \to g(x)(a \cdot e \cdot)$，$f(x) \cdot g_n(x) \to f(x) \cdot g(x)(a \cdot e \cdot)$，$|f \cdot g_n| \leqslant |f \cdot g|$，$|f \cdot g| \in L_1(E)$。$(f \in L_2(E))$。

应用控制收敛定理有

$$\lim_n \int_E f\cdot g_n dx = \int_E f\cdot g dx \quad (f\in L_2).$$

即 $(g_n, f)\to(g, f) \quad (f\in L_2)$.

记 $A_n(f)=(g_n, f), \ (f\in L_2)$.

则$\{A_n(f)\}$是$L_2(E)$上的线性有界泛函序列，它对每个$f\in L_2(E)$都收敛．由题2证明的定理知存在常数$M>0$使

$$|A_n(f)|=|(g_n, f)|\leqslant M, \ (\|f\|\leqslant 1).$$

从而有 $\|g_n\|=\sup\limits_{\|f\|\leqslant 1}|(g_n,f)|\leqslant M$.

即 $\|g_n\|\leqslant M$ （一切n）.

$$\int_E g_n^2 dx\leqslant M^2 \quad （一切n）.$$

而由于$g_n\to g$，$g_n^2\to g^2$，应用法都引理有

$$\int_E g^2 dx\leqslant \sup_n\left\{\int_E g_n^2 dx\right\}\leqslant M^2.$$

即 $\|g\|\leqslant M$，$g\in L_2(E)$.

［注］ 若积分$\int_E f\cdot g dx$对 $L_p(p>1)$ 中所有函数f存在，则$g\in L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

证 (1) 先证明若$\int_E f\cdot g dx$对一切$f\in L_p(p>1)$存在，则必为有限．

若不然，设对某$f\in L_p$积分$\int_E f\cdot g dx=+\infty$．则必存在$f_1\in L_p$使$\int_E f_1\cdot g dx$不存在．（先不妨设$f\geqslant 0, g\geqslant 0$）.

记 $E_n=E(n\leqslant g<n+1)$，$(n=0,1,2,\cdots)$

则 $E=\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n$。

由$f\in L_p(E)$，有

$$\int_E|f|^p dx=\int_E f^p dx=\sum_n\int_{E_n}f^p dx<+\infty.$$

记 $b_n=\int_{E_n}f^p dx$，则

$$\sum_n b_n<+\infty.$$

若$\int_E f\cdot g dx=+\infty$，由

$$\sum_n n\int_{E_n}fdx\leqslant\int_E f\cdot gdx\leqslant\sum_n(n+1)\int_{E_n}fdx$$

$$=\sum_n n\int_{E_n}fdx+\int_E fdx,$$

从$f\in L_p(p>1)$知$f\in L_1$，从而$\int_E fdx<+\infty$.知

$$\sum_n n\int_{E_n}fdx=+\infty.$$

记 $a_n=\int_{E_n}fdx$,

则 $\sum_n na_n=+\infty$.

造f_1如下(以下只考虑使$mE_n>0$的E_n)：

$$f_1=\begin{cases}\dfrac{a_n}{mE_n}, & x\in E_n',\\[2ex] \dfrac{-a_n}{mE_n}, & x\in E_n''.\end{cases}$$

其中$mE_n>0$，$E_n=E'_n\cup E''_n, E'_n\cap E''_n=\phi, mE'_n=mE''_n=\frac{1}{2}mE_n$。

（使$mE_n=0$的E_n上可取$f_1=0$）

则 $$\int_E|f_1|^p dx=\sum_n\int_{E_n}|f_1|^p dx=\sum_n\frac{a_n^p}{(mE_n)^p}mE_n,$$

而 $$a_n^p=\left(\int_{E_n}fdx\right)^p\leqslant\int_{E_n}f^p dx\cdot(mE_n)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\int_{E_n}f^p dx\cdot(mE_n)^{p-1}=b_n\cdot(mE_n)^{p-1}$$

从而 $$\int_E|f_1|^p dx=\sum_n\frac{a_n^p}{(mE_n)^p}\cdot mE_n\leqslant\sum_n b_n\cdot(mE_n)^{p-1}$$

$$\cdot(mE_n)^{1-p}=\sum_n b_n<+\infty。$$

即$f_1\in L_p(E)$。

但是 $$\int_E(f_1\cdot g)_+dx=\int_E(f_1)_+\cdot gdx=\sum_n\int_{E'_n}f_1gdx$$

$$\geqslant\sum_n n\int_{E'_n}f_1dx=\sum_n\frac{na_n}{mE_n}mE'_n=\frac{1}{2}\sum_n na_n$$

$$=+\infty,$$

$$\int_E(f_1\cdot g)_-dx=\int_E(f_1)_-\cdot gdx=\sum_n\int_{E''_n}(-f_1)\cdot gdx$$

$$\geqslant\sum_n n\int_{E''_n}(-f_1)dx=\sum_n\frac{na_n}{mE_n}mE''_n=\frac{1}{2}\sum_n na_n$$

$$=+\infty。$$

从而 $\int_E f_1\cdot gdx=\int_E(f_1\cdot g)_+dx-\int_E(f_1\cdot g)_-dx$不存在。

对一般的f、g可同前面一样进行讨论。

上面的论证说明：若$\int_E f\cdot g dx$对一切 $f\in L_p(p>1)$ 存在时它恒为有限。

(2) 若$(f,\ g)=\int_E f\cdot g dx$对一切$f\in L_p(p>1)$恒为有限，则$g\in L_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$。

置 $g_n=\begin{cases} g, & |g|\leqslant n, \\ n, & |g|>n. \end{cases}$

由$g\in L_1(E)$知g几乎处处有限，$g_n\to g(a.e.)$，由$|g_n|\leqslant n$知$g_n\in L_q(E)$，$\|g_n\|_q$对每个n有界。从而

$$A_n(f)=(g_n,\ f)=\int_E f\cdot g_n dx$$

是L_p上的线性有界泛函。由于对每一$f\in L_p$，$\int_E f\cdot g dx<+\infty$，知$|f\cdot g|\in L_1(E)$，且$|f\cdot g_n|\leqslant|f\cdot g|$，$fg_n\to fg(a.e.)$。应用控制收敛定理便有

$$\lim_n\int_E f\cdot g_n dx=\int_E f\cdot g dx.$$

即 $A_n(f)\to(f,g) \qquad (f\in L_p)$.

即 $\{A_n(f)\}$对每个$f\in L_p(p>1)$都收敛。从而存在$M>0$使

$$|A_n(f)|=|(g_n,f)|\leqslant M,\ (\text{一切}n,\ \|f\|_p\leqslant 1).$$

所以有 $\|g_n\|_q=\sup\limits_{\|f\|_p\leqslant 1}|(f,g_n)|=\sup\limits_{\|f\|_p\leqslant 1}|A_n(f)|\leqslant M,$

(一切n)。

$$\int_E|g_n|^q dx\leqslant M^q,\ (\text{一切}n).$$

而$|g_n|\to|g|(a.e.)$，由法都引理知

$$\int_E |g|^q dx \leqslant \sup_n \left\{ \int_E |g_n|^q dx \right\} \leqslant M^q.$$

即 $$\int_E |g|^q dx \leqslant M^q,$$

$$\|g\|_q \leqslant M,$$

$$g \in L_q(E).$$

6. 凡规格化正交系至多是可列的.

证 即要证$L_2[a,b]$中的标准正交系至多是可列的.

我们知道L_2中存在稠密的可列子集.不妨记为$\Sigma=\{f_1,f_2,\cdots\}$. Σ于L_2稠密.

设$\Omega=\{\omega_\alpha,\alpha\in I\}$是$L_2$中的任一标准正交系，则当$\alpha\neq\beta$时有

$$\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|^2=\|\omega_\alpha\|^2+\|\omega_\beta\|^2=2,$$

$$\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|=\sqrt{2}.$$

对每个$\omega_\alpha(\alpha\in I)$，由于$\Sigma$于$L_2$稠密知必有$f_{n_\alpha}\in\Sigma$使

$$\|f_{n_\alpha}-\omega_\alpha\|<\varepsilon.$$

取$\varepsilon\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$. 这时，当$\alpha\neq\beta$时有

$$\|f_{n_\alpha}-f_{n_\beta}\|\geqslant\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|-\|\omega_\alpha-f_{n_\alpha}\|-\|\omega_\beta-f_{n_\beta}\|$$

$$\geqslant\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0.$$

这说明$f_{n_\alpha}\neq f_{n_\beta}$. 即不同的$\omega_\alpha(\alpha\in I)$对应于不同的$f_{n_\alpha}$. 从而知$\Omega=\{\omega_\alpha,\ \alpha\in I\}$与$\Sigma=\{f_1,f_2,\cdots\}$的一个子集对等,则$\Omega$至多为可列.

7. 设$\{\omega_k(x)\}$是$[a,b]$上封闭的规格化正交系，则在$[a,b]$上关系式$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)=+\infty$几乎处处成立。

证 用反证法。若不然，有$mE\left(\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<+\infty\right)>0$。于是必有正数$M$使$mE\left(x\,\middle|\,\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<M\right)>0$。

记

$$H=E\left\{x\,\middle|\,\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)<M\right\},$$

则$\mu(H)>0$。

取H的可测子集H^*，使$0<mH^*<\frac{1}{2M}$，定义函数

$$f(x)=\begin{cases}A, & x\in H^*,\\ 0, & x\overline{\in} H^*.\end{cases}\qquad(A\neq 0)$$

则$f\in L_2$，$\|f\|^2=\int_a^b f^2(x)dx=A^2\cdot mH^*$。

$$a_k^2=\left(\int_a^b f(x)\omega_k(x)\,dx\right)^2=\left(\int_{H^*}A\cdot\omega_k(x)dx\right)^2$$

$$=A^2\left(\int_{H^*}\omega_k(x)dx\right)^2$$

$$\leqslant A^2\cdot mH^*\cdot\int_{H^*}\omega_k^2(x)dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\leqslant A^2 mH^*\sum_{k=1}^{\infty}\int_{H^*}\omega_k^2(x)\,dx$$

$$=A^2\cdot mH^*\int_{H^*}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)\right)dx$$

$$<A^2 \cdot mH^* \cdot M \cdot mH^* < \frac{1}{2}A^2 mH^*.$$

而 $\|f\|^2 = A^2 mH^* > \frac{1}{2}A^2 mH^* \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$

即 $\|f\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$

这与$\{\omega_k(x)\}$是封闭的规格化正交系的假设相矛盾。所以必须有$mE\left(x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2(x) < +\infty\right) = 0$。

8. 在上述的条件下，对于任何可测集e其测度$me>0$的常是$\sum_{k=1}^{\infty}\int_e \omega_k^2(x)dx = +\infty$。

证法一 直接利用第7题结果知$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x) = +\infty$在$e$上几乎处处成立。从而对任意$n$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_e \omega_k^2(x)\,dx = \int_e \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)\,dx \geqslant \int_e n dx = n \cdot me.$$

由于$me>0$，令$n\to+\infty$得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_e \omega_k^2(x)dx = +\infty.$$

证法二 直接证明。用反证法，若不然，则必有某正测度集e，使 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_e \omega_k^2(x)dx < +\infty$。

记 $g(x) = \sum_k \omega_k^2(x)$。便有

$$\int_e g(x)\,dx = \sum_k \int_e \omega_k^2(x)dx < +\infty.$$

这说明$g(x)$是e上的非负可和函数。

由积分的绝对连续性，对$\frac{1}{2}$，有$\delta>0$，使得对任何$e_1\subset e$，只要$me_1<\delta$，总有

$$\left|\int_{e_1} g(x)dx\right| < \frac{1}{2}.$$

设H是满足$mH<\delta$的e的一个子集，且$mH>0$。则$\left|\int_H g(x)dx\right| < \frac{1}{2}$。取$f(x)=\varphi_H(x)$，其中

$$\varphi_H(x)=\begin{cases} 1, & x\in H, \\ 0, & x\in[a,b]-H. \end{cases}$$

则$\|f\|^2=mH$。记

$$a_k=\int_a^b f(x)\cdot\omega_k(x)dx=\int_H \omega_k(x)dx.$$

$$a_k^2=\left(\int_H \omega_k(x)dx\right)^2 \leqslant mH\cdot\int_H \omega_k^2(x)dx.$$

$$\sum_k a_k^2 \leqslant mH\cdot\sum_k\int_H \omega_k^2(x)dx$$

$$=mH\int_H g(x)dx < \frac{1}{2}mH.$$

而$\|f\|^2=mH$，从而得

$$\|f\|^2=mH>\frac{1}{2}mH\geqslant\sum_k a_k^2.$$

$$\|f\|^2>\sum_k a_k^2.$$

这与假设$\{\omega_k(x)\}$是封闭的规格化正交系相矛盾．从而证明了对任一正测度集e，必有$\sum_k \int_e \omega_k^2(x)dx = +\infty$。

9．有限函数系在L_2中不可能是完全的。

证 设$F=\{f_1,\cdots,f_N\}$为L_2中有限函数系．不妨设为线性无关系。

用施密特正交化手续可作出与F等价的标准正交系$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_N\}$．$\Omega$与$F$可相互线性表出．$\Omega$与$F$同时为完全或不完全。

下面来证明Ω(从而F)不可能为L_2中完全系。

若Ω为L_2中完全系，则亦为封闭系．从而对L_2中每个f,均可表为Ω的线性组合

$$f=\sum_{k=1}^{N} c_k\omega_k,\quad (c_k=(f,\omega_k)).$$

下面来证明L_2中最大线性无关函数组所包含的函数个数不超过N。从而得出矛盾。

设$\varphi_1,\cdots,\varphi_m(m\geqslant N)$为$L_2$中任意一组线性无关系．它们都可用$\Omega$线性表示．设为

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_{11}\omega_1+\cdots+a_{1N}\omega_N,\\
\varphi_2 &= a_{21}\omega_1+\cdots+a_{2N}\omega_N,\\
&\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad (m\geqslant N)\\
\varphi_m &= a_{m1}\omega_1+\cdots+a_{mN}\omega_N.
\end{aligned}$$

由于矩阵

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1N} \\
a_{21} & \cdots & a_{2N} \\
 & \cdots & \\
a_{m1} & \cdots & a_{mN}
\end{pmatrix} \quad (m \times N)
$$

的秩最大为N。知其m个行向量中至多有N个线性无关。其他的行向量可以用这N个线性无关的行向量线性表示。从而知函数系$\varphi_1, \cdots, \varphi_m$中至多有$N$个线性无关。这就说明了$L_2$中任一函数系至多有$N$个是线性无关的。这与$L_2$中存在含有可列个线性无关函数的函数系的结果相矛盾。从而知有限函数系F在L_2中不可能是完全的。

10. 设$\{\omega_k(x)\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$是一个规格化正交系。又设$f(x) \in L_2$。对于线性组合$\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k(x)$，作范数$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k \right\|$，则此范数当$A_k = (f, \omega_k)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$时取最小值。

证 记

$$
c_k = (f, \omega_k), \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k,
$$

$$
R_n = \sum_{k=1}^{n} (c_k - A_k)\omega_k.
$$

而
$$
f - \sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k = f - \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k + \sum_{k=1}^{n} (c_k - A_k)\omega_k
$$
$$
= f - S_n + R_n.
$$

$$
\left\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k \right\|^2 = (f - S_n + R_n, \ f - S_n + R_n)
$$

$$= (f - S_n,\ f - S_n) + 2(f - S_n,\ R_n) + (R_n,\ R_n).$$

由于 $(f - S_n,\ \omega_k) = 0,\ (k = 1,\ \cdots,\ n)$

知 $(f - S_n,\ S_n) = 0,\qquad (f - S_n,\ R_n) = 0.$

从而
$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_k \right\|^2 = \left\| f - S_n \right\|^2 + \left\| R_n \right\|^2$$

$$= \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - A_k)^2.$$

所以
$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_k \right\|^2 \geqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k \right\|^2,$$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_k \right\| \geqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k \right\|.$$

当 $A_k = c_k = (f,\ \omega_k)\ (k = 1,\ \cdots,\ n)$ 时，$\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \omega_k \right\|$ 取最小值 $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \omega_k \right\|$。

11. 设 $\{\omega_k(x)\}$ 是一完全的规格化正交系．假如 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 L_2 中满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b [\omega_k(x) - \varphi_k(x)]^2\, dx < 1$$

的一系函数，那么 $\{\varphi_k(x)\}$ 也是完全的。

证 已知 $\{\omega_k(x)\}$ 为一标准正交完全系．$\{\varphi_k(x)\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| \omega_k - \varphi_k \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (\omega_k - \varphi_k)^2 dx < 1. \quad (*)$$

设 $\varphi \in L_2$，且 $(\varphi,\ \varphi_k) = 0 (k = 1,\ 2,\ \cdots)$．由

$$(\varphi,\ \omega_k)=(\varphi,\ \varphi_k)+(\varphi,\ \omega_k-\varphi_k)=(\varphi,\ \omega_k-\varphi_k),$$

有 $$|(\varphi,\ \omega_k)|^2=|(\varphi,\ \omega_k-\varphi_k)|^2\leqslant\|\varphi\|^2\cdot\|\omega_k-\varphi_k\|^2.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,\ \omega_k)|^2\leqslant\|\varphi\|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_k-\varphi_k\|^2,$$

若 $\varphi\neq 0$，则$\|\varphi\|^2>0$。由(*)有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,\ \omega_k)|^2\leqslant\|\varphi\|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_k-\varphi_k\|^2<\|\varphi\|^2,$$

而$\{\omega_k\}$为完全系，也是封闭系．应有

$$\|\varphi\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,\ \omega_k)|^2$$

从而得 $$\|\varphi\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi,\ \omega_k)|^2<\|\varphi\|^2.$$

这不可能．所以必须 $\varphi=0$。这说明$\{\varphi_k\}$为完全系．

12．设在$[-\pi,\ \pi]$上有函数$f(x)\in L_2$，$f(x+2\pi)=f(x)$。置

$$g_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt,$$

则函数列$g_n(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上平均收敛于 L_2 中之一函数$g(x)$，且

$$\|g\|\leqslant\|f\|\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt,$$

其中乘数$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$不能再减小。

证 由于$f(x)\in L_2[-\pi,\ \pi]$，$f(x)$关于完备系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \cdots$$

的福氏级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

其中 $a_k=\frac{1}{\pi}(f,\ \cos kx)$， $b_k=\frac{1}{\pi}(f,\ \sin kx)$

$(k=0,\ 1,\ 2\cdots)$.

$f(x)$的福氏级数的部分和

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

均方收敛于$f(x)$，即

$$\|S_N(x)-f(x)\|\to 0\quad(N\to\infty).$$

知 $\|f\|^2=\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right)$

由于$\|S_N(x)-f(x)\|\to 0$及$f(x+2\pi)=f(x)$可知

$$\left.\begin{aligned}&\|f(x+t)-S_N(x+t)\|\to 0,\\&\|f(x-t)-S_N(x-t)\|\to 0.\end{aligned}\right\}(N\to\infty)$$

记 $K_{n,N}(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{S_N(x+t)-S_N(x-t)}{t}dt$,

$$g_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt.$$

易知$g_n(x)\in L_2[-\pi,\ \pi]$.

以下再分三步来证明.

(1) $\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\|\to 0$ ($N\to\infty$，对n一致成立).

先证明，当n固定时有

$$\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\|\to 0\quad(N\to\infty).$$

$$\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\|=\left\|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{S_N(x+t)-S_N(x-t)}{t}\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt\right\|$$

$$=\left\|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-S_N(x+t)}{t}dt\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x-t)-S_N(x-t)}{t}dt\right\|$$

$$\leqslant\left\|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-S_N(x+t)}{t}dt\right\|$$

$$+\left\|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x-t)-S_N(x-t)}{t}dt\right\|.$$

而 $\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-S_N(x+t)}{t}dt\right)^2$

$$\leqslant\left(\pi-\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{(f(x+t)-S_N(x+t))^2}{t^2}dt$$

$$\leqslant\pi n^2\int_0^{\pi}(f(x+t)-S_N(x+t))^2dt\to 0,\quad (N\to\infty).$$

从而 $\left\|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-S_N(x+t)}{t}dt\right\|^2$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-S_N(x+t)}{t}dt\right)^2dx$$

$$\leqslant\pi n^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)-S_N(x+t))^2dtdx\to 0,\ (N\to\infty).$$

同样有 $\left\|\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x-t)-S_N(x-t)}{t}dt\right\|^2\to 0\quad (N\to\infty).$

总之有 $\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\|\to 0\quad (N\to\infty,\ n$固定$).$

下面再来证明这均方逼近对 n 是一致的。

首先证明 $\|K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\|\to 0$，$(N_1、N_2\to\infty$，对 n 一致)。

由 $S_N(x+t)-S_N(x-t)$

$$=\left(\frac{a_0}{2}+\sum_1^N(a_k\cos k(x+t)+b_k\sin k(x+t))\right)$$

$$-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_1^N(a_k\cos k(x-t)+b_k\sin k(x-t))\right)$$

$$=\sum_1^N 2(-a_k\sin kx+b_k\cos kx)\sin kt.$$

知 $K_{n,N}(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{S_N(x+t)-S_N(x-t)}{t}dt$

$$=\sum_1^N 2(-a_k\sin kx+b_k\cos kx)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\sin kt}{t}dt.$$

$K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)$

$$=2\sum_{N_1}^{N_2}(-a_k\sin kx+b_k\cos kx)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\sin kt}{t}dt,\quad (N_2>N_1).$$

记 $\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\sin kt}{t}dt=\Delta_{nk}$.

则 $\|K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\|$

$$=2\left\|\sum_{N_1}^{N_2}(-a_k\sin kx+b_k\cos kx)\Delta_{n_k}\right\|$$

$$=2\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{N_1}^{N_2}(a_k^2+b_k^2)\Delta_{nk}^2}.$$

而 $\Delta_{nk}=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\sin kt}{t}dt=\int_{\frac{k}{n}}^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt$。

设 $L\pi\leqslant\frac{k}{n}<(L+1)\pi$ （L为整数）。

$$\Delta_{nk}=\int_{\frac{k}{n}}^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\int_{\frac{k}{n}}^{(L+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$+\int_{(L+1)\pi}^{(L+2)\pi}\frac{\sin t}{t}dt+\cdots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=(-1)^{L}\int_{(\frac{k}{n}-L\pi)}^{\pi}\frac{\sin t}{L\pi+t}dt$$

$$+(-1)^{L+1}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{(L+1)\pi+t}dt+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{(k-1)\pi+t}dt.$$

从而 $|\Delta_{nk}|\leqslant\int_{\frac{k}{n}-L\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{L\pi+t}dt+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{(L+1)\pi+t}dt$

$$\leqslant 2\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=2\Delta,\quad\left(\Delta=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right).$$

$$\|K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\|\leqslant 2\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{N_1}^{N_2}(a_k^2+b_k^2)}\cdot 2\Delta$$

$$=4\Delta\cdot\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{N_1}^{N_2}(a_k^2+b_k^2)}\rightarrow 0,\quad(N_1、N_2\rightarrow\infty)$$

（对 n 一致）。

由于 $\|K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\|\rightarrow 0$ （N_1、$N_2\rightarrow\infty$）。

知 $K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\Longrightarrow 0$ （N_1、$N_2\rightarrow\infty$）。

必有 $\varphi_n(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ 使 $K_{n,N}(x)\Longrightarrow\varphi_n(x)$。而已知

$\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\|\to 0$ $(N\to\infty)$ 知必有 $K_{n,N}(x)\Longrightarrow g_n(x)$ $(N\to\infty)$。所以 $\varphi_n(x)=g_n(x)$，$K_{n,N}(x)\Longrightarrow g_n(x)$ $(N\to\infty)$。

对任意$\varepsilon>0$，存在N_0，当 N_1、$N_2\geqslant N_0$时有

$$\|K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\|<\varepsilon \text{（对} n \text{一致成立）。}$$

由于$K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\Longrightarrow K_{n,N_1}(x)-g_n(x)$，$(N_2\to\infty)$。由法都引理有

$$\|K_{n,N_1}(x)-g_n(x)\|^2\leqslant \sup_{N_2\geqslant N_0}\|K_{n,N_1}(x)-K_{n,N_2}(x)\|^2\leqslant\varepsilon^2$$

$$(N_1\geqslant N_0\text{，对一切}n)\text{。}$$

即 $\|K_{n,N_1}(x)-g_n(x)\|\leqslant\varepsilon$，$(N_1\geqslant N_0$，一切$n)$。

这说明$\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\|\to 0$ $(N\to+\infty$，对n一致成立$)$。

(2) $\|g_n(x)-g_m(x)\|\to 0$，$(n, m\to\infty)$。

对任意$\varepsilon>0$，存在N_0，当$N_1\geqslant N_0$时有

$$\|g_n(x)-K_{n,N_1}(x)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|g_m(x)-K_{m,N_1}(x)\|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{（对一切} n, m\text{）。}$$

从而
$$\begin{aligned}\|g_n(x)-g_m(x)\|&\leqslant\|g_n(x)-K_{n,N_1}(x)\|\\&\quad+\|K_{n,N_1}(x)-K_{m,N_1}(x)\|+\|g_m(x)-K_{m,N_1}(x)\|\\&<\varepsilon+\|K_{n,N_1}(x)-K_{m,N_1}(x)\|\text{。}\end{aligned}$$

固定N_1，

$$\begin{aligned}&K_{n,N_1}(x)-K_{m,N_1}(x)\\&=\sum_1^{N_1}2(-a_k\sin kx+b_k\cos kx)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{\sin kt}{t}dt,\quad (n>m)\text{。}\end{aligned}$$

记 $\Delta_{n,m}^{(k)}=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{\sin kt}{t}dt$，

易知 $|\Delta_{n,m}^{(k)}|=\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{\sin kt}{t}dt\right|\leqslant 3\Delta$。

$$\|K_{n,N_1}(x)-K_{m,N_1}(x)\|$$

$$=2\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{1}^{N_1}(a_k^2+b_k^2)(\Delta_{m,n}^{(k)})^2}.$$

然而 $\Delta_{m,n}^{(k)}=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}\frac{\sin kt}{t}dt=\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{m}}\frac{\sin t}{t}dt$。

当$1\leqslant k\leqslant N_1$时有

$$\lim_{m,n\to\infty}\Delta_{m,n}^{(k)}=\lim_{m,n\to\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{m}}\frac{\sin t}{t}dt=0.\ \left(\text{因}\frac{k}{m}、\frac{k}{n}\to 0\right).$$

从而 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|K_{n,N_1}(x)-K_{m,N_1}(x)\|$

$$=\lim_{m,n}2\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{1}^{N_1}(a_k^2+b_k^2)(\Delta_{m,n}^{(k)})^2}=0.$$

$$\lim_{m,n}\|g_n(x)-g_m(x)\|$$

$$\leqslant\varepsilon+\lim_{m,n}\|k_{n,N_1}(x)-k_{m,N_1}(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

由于ε可任意小可知

$$\lim_{m,n\to\infty}\|g_n(x)-g_m(x)\|=0.$$

这说明有$g(x)\in L_2[-\pi,\pi]$使$g_n(x)\xrightarrow{L_2}g(x)$。我们记

$$g(x)=\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt.$$

则$\|g_n(x)-g(x)\|\to 0$。

(3) $\|g\| \leqslant \|f\| \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$，且乘数$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ 不能再减少。

由于$\|K_{n,N}(x)-g_n(x)\| \to 0$ $(N \to +\infty)$ 对n一致成立。对任意$\varepsilon>0$，当$N_1 \geqslant N_0$时有

$$\|K_{n,N_1}(x)-g_n(x)\|<\varepsilon \quad (一切 n).$$

$$\begin{aligned}\|g_n(x)\| &\leqslant \|g_n(x)-K_{n,N_1}(x)\|+\|K_{n,N_1}(x)\| \\ &<\varepsilon+\|K_{n,N_1}(x)\| \qquad (N_1 \geqslant N_0，一切 n).\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}K_{n,N_1}(x) &= 2\sum_{1}^{N_1}(-a_k \sin kx+b_k \cos kx)\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\sin kt}{t} dt \\ &= 2\sum_{1}^{N_1}(-a_k \sin kx+b_k \cos kx)\Delta_{n,k}\end{aligned}$$

$$\|K_{n,N_1}(x)\| = 2\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{1}^{N_1}(a_k^2+b_k^2)\Delta_{n,k}^2}.$$

对固定的N_1，当$1 \leqslant k \leqslant N_1$时有

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} \Delta_{n,k} &= \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\sin kt}{t} dt=\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{k}{n}}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_{0}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt.\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}\int_{0}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt+\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &\quad +\cdots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt+(-1)^1\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{\pi+t} dt\end{aligned}$$

$$+(-1)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\pi+t}dt$$

$$+\cdots+(-1)^{k-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(k-1)\pi+t}dt.$$

$$\left|\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqslant\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\Delta.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_{n,K}|=|\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_{n,k}|$

$$=\left|\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqslant\Delta.\quad(1\leqslant k\leqslant N_1)$$

$$\lim_n\|K_{n,N_1}(x)\|=2\sqrt{\pi}\lim_n\sqrt{\sum_1^{N_1}(a_k^2+b_k^2)(\Delta_{n,k})^2}$$

$$\leqslant2\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_1^{N_1}(a_k^2+b_k^2)\Delta^2}$$

$$=2\sqrt{\pi}\,\Delta\sqrt{\sum_1^{N_1}(a_k^2+b_k^2)}\leqslant2\Delta\|f\|.$$

$\left(\text{因}\quad\|f\|^2=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_1^{\infty}(a_K^2+b_K^2)\right]\right).$

当 $N_1\geqslant N_0$ 时

$$\lim_n\|g_n(x)\|\leqslant\varepsilon+\lim_n\|K_{n;N_1}(x)\|\leqslant\varepsilon+2\Delta\|f\|.$$

有 $\|g(x)\|\leqslant\varepsilon+2\Delta\|f\|.$

由于 ε 可任意小，便得

$$\|g(x)\|\leqslant2\Delta\|f\|.$$

而 $2\Delta=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt.$

$$\therefore \quad \|g\| \leqslant \|f\| \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

下面再来证明乘数$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$不能再减少。

取 $f=\cos x$ 时，

$$g_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\cos(x+t)-\cos(x-t)}{t} dt$$

$$=-2\sin x \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$g_n(x) \to g(x)=-2\sin x \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$=-2\Delta \sin x.$$

$$\|g\|=2\Delta\|\sin x\|=2\Delta\|\cos x\|=2\Delta\|f\|$$

$$=\|f\| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

这说明当 $f=\cos x$ 时，不等式

$$\|g\| \leqslant \|f\| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

取等号，即说明乘数 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ 不能再减少。

13. 设在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 属于 L_2，在 $[a, b]$ 之外 $f(x)=0$．置

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt,$$

则$\|\varphi\| \leqslant \|f\|$。（证明见14题）

14. 在前题记号下，当$h \to 0$时函数$\varphi(x)$在L_2中平均收敛于$f(x)$。

证 不妨记

$$f_h(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

（1） $\|f_h\| \leqslant \|f\|$。

由 $$\left(f_h(x)\right)^2 = \left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt\right)^2$$

$$= \frac{1}{4h^2}\left(\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt\right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4h^2}\, 2h\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)dt$$

$$= \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)dt.$$

所以 $$\|f_h\|^2 = \int_a^b f_h^2(x)dx \leqslant \int_a^b \left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)dt\right)dx$$

$$\leqslant \int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2.$$

从而得 $\|\varphi\| = \|f_h\| \leqslant \|f\|$。

（2） $\lim\limits_{h \to 0}\|\varphi_h - f\| = 0$。

由于$f \in L_2[a, b]$，对于任意$\varepsilon > 0$，存在$g \in C[a,b]$使$\|f - g\| < \varepsilon$。（不妨设g于$[a,b]$外也为0）。这里g依于ε。暂时固定ε和g。

对 g，作 g_h：

$$g_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}g(t)dt,$$

易知$g_h(x)$也是$[a,b]$上的连续函数，即 $g_h(x)\in C[a,b]$。

$$\|\varphi-f\|=\|f_h-f\|\leqslant\|f_h-g_h\|+\|g_h-g\|+\|g-f\|.$$

$$f_h-g_h=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\big(f(t)-g(t)\big)dt=(f-g)_h.$$

由(1)知 $\|f_h-g_h\|=\|(f-g)_h\|\leqslant\|f-g\|<\varepsilon$。（对任意 h）。

对 $\|g_h-g\|$（ε、g暂时固定）

$$g_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}g(t)dt=g(x+\theta h)\quad(|\theta|\leqslant 1).$$

由于$g(x)$于$[a,b]$一致连续，有

$$\lim_{h\to 0}g_h(x)=g(x)\quad(\text{于 }[a,b]\text{ 一致成立}).$$

从而有 $\lim\limits_{h\to 0}\|g_h-g\|^2=\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b(g_h-g)^2dx=0$。

$$\lim_{h\to 0}\|g_h-g\|=0.$$

于是
$$\begin{aligned}\|\varphi-f\|&=\|f_h-f\|\\&\leqslant\|f_h-g_h\|+\|g_h-g\|+\|g-f\|\\&<2\varepsilon+\|g_h-g\|\quad(\text{对任意 }h).\end{aligned}$$

从而有 $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h-f\|\leqslant 2\varepsilon+\lim\limits_{h\to 0}\|g_h-g\|=2\varepsilon$。

再由 ε 的任意性便知

$$\lim_{h\to 0}\|\varphi-f\|=\lim_{h\to 0}\|f_h-f\|=0.$$

15. 设 $f\in L_p[a,\ b](p>1)$。$f(x)$于$[a,\ b]$之外为 0。置

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt.$$

则 $\|f_h\|_p\leqslant\|f\|_p$，

且 $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h-f\|_p=0$。

（以下$\|f\|_p$中的p略去。$\|f\|$是指所讨论空间里的范数）。

证 （1） $\|f_h\|\leqslant\|f\|$。

由于
$$\begin{aligned}\left|f_h(x)\right|&=\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt\right|\\&\leqslant\frac{1}{2h}\left(\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(2h\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(2h\right)^{\frac{1}{q}-1}\left(\int_{x-h}^{x+h}|f|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(2h\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_{x-h}^{x+h}|f|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|f_h(x)\right|^p&\leqslant\left(\int_{x-h}^{x+h}|f|^pdt\right)\left(2h\right)^{-1}\\&=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|^pdt.\end{aligned}$$

从而有
$$\begin{aligned}\int_a^b|f_h(x)|^p\,dx&\leqslant\int_a^b\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f|^pdt\right)dx\\&\leqslant\int_a^b|f|^pdx.\end{aligned}$$

即有 $\|f_h\|\leqslant\|f\|$。

（2） $\lim\limits_{h\to 0}\|f_h-f\|=0$。

对任意$\varepsilon>0$，有$g\in C[a,\ b]$（取g于$[a,\ b]$外为 0）。使

$\|f-g\|<\varepsilon$。暂时固定 ε、g。

对 g，作 g_h：

$$g_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}g(t)dt,$$

知 $g_h(x)\in C[a, b]\subset L_p[a, b]$。

由于 $f_h-g_h=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\big(f(t)-g(t)\big)dt=(f-g)_h$。

由(1)知 $\|f_h-g_h\|=\|(f-g)_h\|\leqslant\|f-g\|<\varepsilon$。

从而有 $\|f_h-f\|<2\varepsilon+\|g_h-g\|$ （对任意 h）。

而 $g_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}g(t)dt=g(x+\theta h)$，$(|\theta|\leqslant 1)$。

由 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续，有

$$\lim_{h\to 0}g_h(x)=g(x)，（于[a, b]一致成立）。$$

从而有 $\lim\limits_{h\to 0}\|g_h-g\|=0$。

$$\lim_{h\to 0}\|f_h-f\|\leqslant 2\varepsilon+\lim_{h\to 0}\|g_h-g\|=2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性便得：

$$\lim_{h\to 0}\|f_h-f\|=0.$$

16. 证明空间 $L_p(p\geqslant 1)$ 是完备的.

证 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $L_p(E)$ 中的基本序列. 即 $\|f_n-f_m\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$。下面来证明存在 $f\in L_p(E)$ 使 $\|f_n-f\|\to 0$.

由 $\|f_n-f_m\|\to 0$，必有 $f_n-f_m\Longrightarrow 0$. 这从

$$\int_E|f_n-f_m|^p dx\geqslant\int_{E(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)}|f_n-f_m|^p dx\geqslant$$

$\sigma^p mE(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)$ 可知。再由ch4．5题知存在E上几乎处处有限的可测函数$f(x)$使$f_n\Longrightarrow f$。

下面证明$\|f_n-f\|\to 0$，$f\in L_p(E)$。

由$\|f_n-f_m\|\to 0$。对任意$\varepsilon>0$，存在N使得当n、$m\geqslant N$时有$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$。即有

$$\int_E |f_n-f_m|^p dx<\varepsilon^p \quad (n、m\geqslant N)。$$

由于$f_m\Longrightarrow f$，存在$\{m_i\}$ $(m_1<m_2<\cdots)$ 使 $f_{m_i}\to f(a.e.)$ $(i\to\infty)$。对任意固定的n $(n\geqslant N)$也有

$$f_n-f_{m_i}\to f_n-f \quad (a.e.)\quad (m_i\to\infty),$$

$$|f_n-f_{m_i}|^p\to|f_n-f|^p \quad (a.e.)\quad (m_i\to\infty)。$$

且当n、$m_i\geqslant N$时有

$$\int_E |f_n-f_{m_i}|^p dx<\varepsilon^p。$$

对$\{|f_n-f_{m_i}|^p\}$（n固定，m_i变动），应用法都引理得：

$$\int_E |f_n-f|^p dx\leqslant\sup_{m_i\geqslant N}\left\{\int_E |f_n-f_{m_i}|^p dx\right\}\leqslant\varepsilon^p \quad (n\geqslant N)。$$

即得$\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$ $(n\geqslant N)$。这说明$\|f_n-f\|\to 0$，$(n\to\infty)$。且有$f\in L_p(E)$。

17．证明空间l_p $(p\geqslant 1)$是完备的。

证 设 $x_n=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots)=\{x_k^{(n)},\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$，$x_n\in l_p$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$。且有

$$\|x_n-x_m\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0,\quad (n,\ m\to\infty)。$$

下面证明：必有$x\in l_p$使$\|x_n-x\|\to 0$，$(n\to\infty)$。

由 $|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$，$(n,\ m\to\infty)$。

知$\{x_k^{(n)},\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$（$k$固定）是基本收敛数列。从而必有$x_k$使$x_k^{(n)}\to x_k$ $(n\to\infty)$。记

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots)=\{x_k\}.$$

下面来证明$\|x_n-x\|\to 0$及$x\in l_p$。

由于$\|x_n-x_m\|\to 0$ $(n,\ m\to\infty)$知对任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n,\ m\geqslant N$时有

$$\|x_n-x_m\|=\left(\sum_{1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

从而对任何自然数r有

$$\left(\sum_{1}^{r}|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon\quad(n,\ m\geqslant N).$$

由于r为有限数，令$m\to\infty$得

$$\left(\sum_{1}^{r}|x_k^{(n)}-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon\quad(n\geqslant N).$$

再令$r\to\infty$得

$$\left(\sum_{1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon\quad(n\geqslant N).$$

即 $\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon$，$(n\geqslant N)$。

从而有 $x=(x-x_n)+x_n\in lp$。

且 $\|x_n-x\|\to 0$ $(n\to\infty)$。

18. 有界叙列$x=\{x_k\}$——$\|x\|=\sup\{|x_k|\}<+\infty$——的全体，所成的空间**m**是完备的。

证 设$x_n=\{x_k^{(n)},\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$为有界数列空间**m**中的基本序列。即

$$\|x_n-x_m\|=\sup_k\{|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\}\to 0\ \ (n,\ m\to\infty).$$

所以对每个k有

$$|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\leqslant\sup_k\{|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\}\to 0\ \ (n,\ m\to\infty).$$

从而对每个k，$\{x_k^{(n)},\ n=1,2,\cdots\}$为基本收敛数列。存在$x_k$使$x_k^{(n)}\to x_k$ $(n\to\infty)$。记

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots)=\{x_k\}.$$

下面来证明$\|x_n-x\|\to 0$，$(n\to\infty)$。且$x\in\mathbf{m}$。

由 $\|x_n-x_m\|=\sup_k\{|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\}\to 0\ (n,\ m\to\infty)$，

对任意$\varepsilon>0$，存在N，当n，$m\geqslant N$时有

$$\|x_n-x_m\|=\sup_k\{|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|\}<\varepsilon.$$

从而对任意k都有

$$|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}|<\varepsilon\quad(n,\ m\geqslant N).$$

令$m\to\infty$得：

$$|x_k^{(n)}-x_k|\leqslant\varepsilon,\ (m\geqslant N)\ (\text{任何}k).$$

有 $\sup_k\{|x_k^{(n)}-x_k|\}\leqslant\varepsilon\quad(n\geqslant N)$.

即 $\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon\quad(n\geqslant N)$，从而有$x_n-x\in\mathbf{m}$ $(n\geqslant N)$。$x=(x-x_n)+x_n\in\mathbf{m}$。且$\|x_n-x\|\to 0$，$(n\to\infty)$。

19. 设$[a,\ b]$上的连续函数的全体是C。若取C中f的范数

$\|f\|=\max|f(x)|$，则C是一完备的空间。

证 即考虑$[a, b]$上连续函数全体$C[a, b]$。范数规定为$\|f\|=\max\limits_{[a,b]}|f(x)|$。易知$C[a, b]$是线性赋范空间。现证明它是完备的空间。

设$\{f_n(x)\}$为$C[a, b]$中的基本叙列。即$\|f_n-f_m\|\to 0(n, m\to\infty)$。要证明存在$f\in C[a, b]$使$\|f_n-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$。

对任意的$x\in[a, b]$，由于

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\max_{[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|\to 0\ (m, n\to\infty).$$

知$\{f_n(x)\}$（对任意固定的$x\in[a, b]$）为基本收敛数列。从而有数$f(x)$，使$f_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$。当x在$[a, b]$变动时，就得到了$[a, b]$上的一个函数$f(x)$，使$f_n(x)\to f(x)$ $(x\in[a, b])$。

下面来证明$f(x)\in C[a, b]$，且$\|f_n-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$。

对任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n, m\geqslant N$时有

$$\|f_n-f_m\|=\max_{[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

从而知对一切$x\in[a, b]$有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\ (n, m\geqslant N).$$

令$m\to\infty$得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\ (n\geqslant N).$$

它对一切$x\in[a, b]$成立。这说明$f_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛到$f(x)$。从而知$f(x)$为$[a, b]$上的连续函数，即$f(x)\in C[a, b]$，且有

$$\max_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\ (n\geqslant N).$$

即$\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$ $(n\geqslant N)$。这说明$\|f_n-f\|\to 0$ $(n\to\infty)$。

20. 如果在函数集A中不存在异于零的函数而与函数系$\{\varphi_k(x)\}$中所有函数成正交，则称$\{\varphi_k(x)\}$在A中是完全的．在(R)可积的函数集中为完全的规格化正交系未必是封闭的．

证 以(R)表示(R)可积函数类．即要找出函数系$\{\varphi_n(x)\}\subset(R)$，使$\{\varphi_n\}$在$(R)$中是完全的，但在$(R)$中不封闭．

在区间$[0, 1]$上讨论．取定其中具正测度的完备疏朗集E．定义函数$\varphi_0(x)=\dfrac{\varphi_E(x)}{\sqrt{mE}}$，其中

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[0, 1]-E.\end{cases}$$

则$\varphi_0\in L_2[0, 1]$，$\|\varphi_0\|=1$，$(1, \varphi_0)=\int_0^1\varphi_0(x)\,dx=\sqrt{mE}$．由于$\varphi_0(x)$的不连续点全体$E$具有正测度，知$\varphi_0(x)$不$(R)$可积．且任何满足$f(x)=c\varphi_0(x)$ $(a\cdot e\cdot)$ $(c\neq0)$的$f(x)$亦不(R)可积．

记 $S=\{g\,|\,(g, \varphi_0)=0, \ g\in L_2[0, 1]\}$．

$\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 为有理系数多项式全体．对每个$f_n(x)$，作函数(多项式)

$$g_n(x)=f_n(x)-\frac{1}{\sqrt{mE}}(f_n, \varphi_0), \ (n=1, 2, \cdots).$$

则 $$(g_n, \varphi_0)=(f_n, \varphi_0)-\frac{1}{\sqrt{mE}}(f_n, \varphi_0)(1, \varphi_0)=0,$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

即$g_n\in S(n=1,2,\cdots)$．且$\{g_n\}$在S中稠密．事实上，由于$\{f_n\}$在L_2中稠密，从而对任一$g\in S$，必有$\{f_{n_k}\}$使得

$$\|f_{n_k}-g\|\to 0,\ (k\to\infty).$$

而 $(f_{n_k},\varphi_0)=(f_{n_k}-g,\varphi_0)$.

从而 $\|g_{n_k}-g\|=\|f_{n_k}-g-\frac{1}{\sqrt{mE}}(f_{n_k}-g,\varphi_0)\|$

$$\leqslant\|f_{n_k}-g\|+\frac{1}{\sqrt{mE}}\|f_{n_k}-g\|\to 0,(k\to\infty).$$

所以$\{g_n\}$在S中稠密．亦在S中完全．对$\{g_n\}$施行标准正交化手续，即可得S中的完全标准正交系$\{\varphi_n\}(n=1,2,\cdots)$．由于每个$\varphi_n$是某些$g_n$的线性组合，从而$\varphi_n(n=1,2,\cdots)$也是多项式．即$\{\varphi_n,n=1,2,\cdots\}\subset(R)$．

由于有$\varphi_0\in L_2[0,1]$，$\varphi_0\neq 0$而$(\varphi_0,\varphi_n)=0(n=1,2,\cdots)$，知$\{\varphi_n,n=1,2,\cdots\}$不是$L_2[0,1]$中之完全系．

但可以证明$\{\varphi_n\}$是(R)中之完全系，但不是封闭系．

事实上，对任意$f\in L_2[0,1]$，$\|f\|\neq 0$，若$(f,\varphi_n)=0,(n=1,2,\cdots)$．则

$$(f-(f,\varphi_0)\varphi_0,\varphi_0)=(f,\varphi_0)-(f,\varphi_0)\|\varphi_0\|^2=0.$$

所以$f-(f,\varphi_0)\varphi_0\in S$，且

$$(f-(f,\varphi_0)\varphi_0,\varphi_n)=(f,\varphi_n)-(f,\varphi_0)(\varphi_0,\varphi_n)=0,$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

由于$\{\varphi_n,n=1,2,\cdots\}$为$S$中完全系，所以

$$f-(f,\varphi_0)\varphi_0=0\quad(a.e.).$$

即 $f=(f,\varphi_0)\varphi_0\quad(a.e)$.

而$(f,\varphi_0)^2=\|f\|^2>0$，即$(f,\varphi_0)\neq 0$．所以$f\overline{\in}(R)$．这说明若$f\in(R)$，$(f,\varphi_n)=0(n=1,2,\cdots)$．必有$f=0$．即$\{\varphi_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$

为(R)中完全系。

但对任何$f\in(R)$，只要$(f,\varphi_0)\neq 0$（如可取$f\equiv 1$）就有

$$\|f\|^2\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}(f,\varphi_n)^2=(f,\varphi_0)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)^2>\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)^2.$$

所以$\{\varphi_n\}(n=1,2,\cdots)$在(R)中不封闭。

21. 若$1\leqslant r<p$，则$L_p\subset L_r$。

证 设$m(E)<+\infty$。$p>r\geqslant 1$。$f(x)\in L_p$。

由于 $\int_E|f|^p dx=\int_E(|f|^r)^{\frac{p}{r}}dx<+\infty$.

知$|f|^r\in L_{\frac{p}{r}}(E)$，$\left(\frac{p}{r}>1\right)$。$\frac{p}{r}$的相伴数为$\dfrac{1}{1-\frac{r}{p}}=\dfrac{p}{p-r}$，

$\frac{p}{p-r}>1$。显然$1\in L_{\frac{p}{p-r}}(E)$。从而

$$\int_E|f|^r dx\leqslant\left(\int_E(|f|^r)^{\frac{p}{r}}dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_E 1^{\frac{p}{p-r}}dx\right)^{\frac{p-r}{p}}.$$

$$\left(\int_E|f|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E 1dx\right)^{\frac{p-r}{pr}}$$

即 $\|f\|_r\leqslant\|f\|_p\,(mE)^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}$，$(p>r\geqslant 1)$.

由 $mE<+\infty$立知$f\in L_r(E)$。

[注1]. 当$1\leqslant r<p$时，由于

$$\|f_n-f\|_r\leqslant\|f_n-f\|_p\,(mE)^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}.$$

从而由$\|f_n-f\|_p\to 0$可推出$\|f_n-f\|_r\to 0$.

[注2]. 若$mE=+\infty$，$p>r>0$。则$L_p(E)$与$L_r(E)$互不包

含．（详细举例可参看复旦大学"实变函数论与泛函分析概要"P．273）．

22． 若$1\leqslant r<p$，则$l_p\supset l_r$．

证 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l_r$．我们来证明$x\in l_p(p>r\geqslant 1)$．

由$x\in l_r$，即$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^r<+\infty$．对某$\varepsilon>0(0<\varepsilon<1)$，存在$N$使

$$\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^r<\varepsilon<1.$$

从而有 $|x_i|^r<1$，$|x_i|<1 \quad (i\geqslant N)$．

由于$p>r\geqslant 1$，有

$$|x_i|^p\leqslant|x_i|^r,\ (i\geqslant N).$$

$$\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p\leqslant\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^r<\varepsilon.$$

从而有 $$\sum_{1}^{\infty}|x_i|^p=\sum_{1}^{N-1}|x_i|^p+\sum_{N}|x_i|^p\leqslant\sum_{1}^{N-1}|x_i|^p+\varepsilon<+\infty.$$

这说明$x\in l_p$，所以$l_r\subset l_p(p>r\geqslant 1)$．

23． 设$p>1$，$\{f_n(x)\}\subset L_p$．若$f_n(x)$ p次平均收敛于$F(x)$，$F(x)\in L_p$，则当$1\leqslant r<p$时$\{f_n(x)\}$ r次平均收敛于$F(x)$．

证 设$f_n\in L_p(E)$，$F\in L_p(E)$，$mE<+\infty$．且$\|f_n-F\|\to 0$ $(n\to\infty)$．由于$1\leqslant r<p$，$L_p(E)\subset L_r(E)$，知$f_n\in L_r(E)$，$F\in L_r(E)$．且

$$\|f_n - F\|_r \leqslant \|f_n - F\|_p (m(E))^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}.$$

由此立知：从$\|f_n - F\|_p \to 0$可推出$\|f_n - F\|_r \to 0$。

24. 设$1 \leqslant r < p$，$x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \cdots) \in l_r$。若$x_n$在空间$l_r$中收敛于$x$，则$x_n$在$l_p$中也收敛于$x$。

证 设$x_n = \{x_i^{(n)}\} \in l_r$，$x = \{x_i\} \in l_r$，$p > r \geqslant 1$。由 22 题知$l_p \supset l_r$。从而有$x_n \in l_p$，$x \in l_p$。

若已知$\|x_n - x\|_r \to 0 (n \to \infty)$，则对任意$\varepsilon > 0$(取$\varepsilon < 1$)，存在$N$，当$n \geqslant N$时有

$$\|x_n - x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} < \varepsilon.$$

从而当$n \geqslant N$时有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^r < \varepsilon^r < 1.$$

$$|x_i^{(n)} - x_i|^r < 1, \ |x_i^{(n)} - x_i| < 1, \ (\text{一切} i, \ n \geqslant N).$$

由$p > r \geqslant 1$，有

$$|x_i^{(n)} - x_i|^p \leqslant |x_i^{(n)} - x_i|^r, \ (\text{一切} i, \ n \geqslant N).$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^r < \varepsilon^r, \ (n \geqslant N).$$

即 $$\|x_n - x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{r}{p}} \quad (n \geqslant N).$$

由于ε可任意小便知

$$\|x_n - x\|_p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

25. 如果数列$\{a_k\}$有如下的性质：对于任意的$\{x_k\} \in l_p$ (p

>1)能使$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$收敛，则$\{a_k\}\in l_q$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 先证明：存在有限常数$M>0$，使对任意n和一切$x\in l_p$恒有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| \leqslant M\cdot\|x\|_p,\ \left(\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

记 $a^{(n)}=(a_1,\ \cdots,\ a_n,\ 0,\ 0,\ \cdots)$,

则$a^{(n)}\in l_p$. 作l_p上的线性泛函

$$A_n x=(a^{(n)},\ x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ (x\in l_p).$$

由 $$|A_n x|=\left|\sum_{1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \|a^{(n)}\|_q\cdot\|x\|_p,$$

$$\left(\|a^{(n)}\|_q=\left(\sum_{1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

知：(对每个n)$A_n x$是l_p上的线性有界泛函. 由题设知道泛函序列$\{A_n x\}$对每个$x\in l_p$，当$n\to\infty$时是收敛的. 应用第2题中证明的定理知$\{A_n x\}$必在l_p中单位球$\{x|\ \|x\|_p\leqslant 1\}$上一致有界. 即存在有限常数$M>0$使

$$\sup_{\|x\|_p\leqslant 1}\{|A_n x|\}\leqslant M,\ (一切n).$$

从而知 $$\left|\sum_{1}^{n} a_k x_k\right|=|A_n x|\leqslant M\cdot\|x\|_p,(一切n,一切x\in l_p).$$

再来证明 $a\in l_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

由于 $|A_n x|=\left|\sum_{1}^{n} a_i x_i\right|\leqslant M\cdot\|x\|_p$ 对一切n和一切 $x\in l_p$ 成立. 特别取

$$x^{(n)}=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots,\ x_n^{(n)},\ 0,\ 0,\ \cdots).$$

其中 $x_k^{(n)}=\begin{cases}|a_k|^{q-1}\operatorname{sgn} a_k, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n.\end{cases}$ $\left(q-1=\frac{q}{p}\right)$.

显然$x^{(n)}\in l_p$, $\|x^{(n)}\|_p=\left(\sum_1^n|a_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$.

$$A_n x^{(n)}=\sum_1^n a_k x_k^{(n)}=\sum_1^n a_k|a_k|^{q-1}\operatorname{sgn} a_k=\sum_1^n|a_k|^q.$$

从而 $|A_n x^{(n)}|=\sum_1^n|a_k|^q\leqslant M\cdot\|x^{(n)}\|_p$

$=M\cdot\left(\sum_1^n|a_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, (一切$n$).

即得 $\left(\sum_1^n|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant M$, (一切$n$).

从而 $\|a\|_q=\left(\sum_1^\infty|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant M$.

即$a\in l_q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

26. 如果$\{a_k\}$有如下的性质：对于任意的$\{x_k\}\in l=l_1$，能使$\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$收敛，则$\{a_k\}\in \mathbf{m}$，即$\sup\{|a_k|\}<+\infty$.

证法一 设$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots)$，$x\in l_1$，即$\sum_1^\infty|x_k|<+\infty$，$\|x\|=\sum_1^\infty|x_k|$.

记 $a=(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_k,\cdots)$，$a^{(n)}=(a_1,\cdots,a_n,0,0,\cdots)$.

对$a^{(n)}$，作l_1上的线性泛函

$$A_n x=(a^{(n)},x)=\sum_1^n a_k x_k.$$

由 $$|A_n x|=\left|\sum_1^n a_k x_k\right|\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\{|a_k|\}\cdot\sum_1^n|x_k|$$

$$\leqslant\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\{|a_k|\}\cdot\|x\|$$

知，$A_n x$(对每个n)均为l_1上线性有界泛函。$\{A_n x\}$为l_1上线性有界泛函序列。由题设可知，$\{A_n x\}$对任意$x\in l_1$为收敛数列。根据第2题中的定理可知，存在有限常数$M>0$使

$$|A_n x|\leqslant M\cdot\|x\|,\ (\text{一切}n,\text{一切}x\in l_1)$$

成立。下面再来证明$\sup\{|a_k|\}<+\infty$。

作 $x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}$，其中

$$x_k^{(n)}=\begin{cases}\operatorname{sgn}a_n, & k=n,\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

即 $x^{(n)}=(0,\cdots,\operatorname{sgn}a_n,0,\cdots)$。显然$x^{(n)}\in l_1$，$\|x^{(n)}\|=1$，(一切$n$)。

而 $A_n x^{(n)}=a_n\operatorname{sgn}a_n=|a_n|$， $(n=1,2,\cdots)$。

从而有 $|A_n x^{(n)}|=|a_n|\leqslant M\cdot\|x^{(n)}\|=M$，(一切$n$)。

即$|a_n|\leqslant M$(一切n)。$sup\{|a_n|\}\leqslant M$。$a\in\mathbf{m}$。

证法二 用反证法。即若$\sup\{|a_k|\}=+\infty$，证明必存在$x^{(1)}\in l_1$使$\sum_k a_k x_k^{(1)}=+\infty$。

由$\sup\{|a_k|\}=+\infty$，对任意i，存在$\{n_i\}$ $(n_1<n_2<\cdots)$ $(n_i\to\infty)$ 使$|a_{n_i}|>i$ $(i=1,2,\cdots)$。取$x^{(1)}=\{x_k^{(1)}\}$如下：

$$x_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{i^2}\operatorname{sgn} a_{n_i}, & k = n_i, \\ 0, & k \neq n_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

则 $\sum\limits_k |x_k^{(1)}| = \sum\limits_i |x_{n_i}^{(1)}| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} |\operatorname{sgn} a_{n_i}| = \sum\limits_i \frac{1}{i^2} < +\infty$.

即$x^{(1)} = \{x_k^{(1)}\} \in l_1$。但

$$\sum_k a_k x_k^{(1)} = \sum_i a_{n_i} \frac{1}{i^2} \operatorname{sgn} a_{n_i} = \sum_i \frac{|a_{n_i}|}{i^2} > \sum_i \frac{1}{i}$$

$$= +\infty. \quad (\text{因} |a_{n_i}| > i).$$

这与题设矛盾．从而必有$\sup\{|a_k|\} < +\infty$，即$a \in \mathbf{m}$

27．设$p>1$．若 $f(x)$ 与$g(x)$能使闵明可夫斯基不等式 中等号成立，则必$g(x) = Kf(x)$，其中$K \geqslant 0$．

证 分两步

(1)证明：设$f \in L^p(E)$， $g \in L^q(E)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$．则使霍尔德不等式

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)| dx \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \cdots\cdots(H)$$

中等号成立的充要条件是存在常数$\lambda \geqslant 0$使

$$|g(x)| = \lambda |f(x)|^{\frac{p}{q}} \qquad (a.e.\ x \in E),$$

或$f(x) = 0$ ($a.e.$ 于E)。

证 当$f(x) = 0$ ($a.e.$)或$g(x) = 0$ ($a.e.$) 至少一个成立时不等式(H)中等号自然成立．

以下设 $f(x)$、$g(x)$ 不是上面的情形，从而有$\|f\|_p > 0$,

$\|g\|_q>0$。我们来证明，若不等式(H)中等号成立时必有$\lambda>0$使
$|g(x)|=\lambda|f(x)|^{\frac{p}{q}}(a.e.)$。

在证明不等式(H)的过程中我们用到不等式

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\quad(a>0,b>0).$$

它取等号时必须$a^p=b^q$。在证明过程中我们还取

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\|f\|_p},\ \psi(x)=\frac{g(x)}{\|g\|_q},$$

$$\left(\int_E|\varphi|^p dx=1,\quad\int_E|\psi|^q dx=1\right).$$

从而有，使不等式

$$|\varphi\cdot\psi|\leqslant\frac{|\varphi|^p}{p}+\frac{|\psi|^q}{q}$$

中等号成立必须只需

$$|\varphi|^p=|\psi|^q.$$

因此欲使不等式

$$\int_E|\varphi\cdot\psi|dx\leqslant\int_E\left(\frac{|\varphi|^p}{p}+\frac{|\psi|^q}{q}\right)dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

即不等式$\int_E|f\cdot g|dx\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q$

中等号成立，必须只需

$$|\varphi(x)|^p=|\psi(x)|^q,\quad(a.e.\text{于}E).$$

亦即 $$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}=\frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q},\quad(a.e.\text{于}E).$$

即 $$|g(x)|^q=\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}|f(x)|^p,\ (a.e.)$$

$$|g(x)| = \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}}|f(x)|^{\frac{p}{q}}, \quad (a.e.)$$

取$\lambda = \dfrac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}}$，$(\lambda>0)$。则有

$$|g(x)| = \lambda|f(x)|^{\frac{p}{q}} \quad (a.e.\text{于}E)$$

当$g(x)=0$ $(a.e.)$时可取$\lambda=0$，这时$|g(x)|=\lambda|f(x)|^{\frac{p}{q}}$ $(a.e.)$仍成立，还有可能$f(x)=0$ $(a.e.)$。

反之，若$\|g\|=\lambda\|f\|^{\frac{p}{q}}(\lambda\geqslant 0)(a.e.\text{于}E)$成立或$f(x)=0$ $(a.e.)$时，则(H)中等号成立。

当$f=0$ $(a.e.)$或$g=0(a.e.)$（相当于$\lambda=0$）时(H)中等号自然成立。

设$\lambda>0$，$|g|=\lambda|f|^{\frac{p}{q}}$ $(a.e.)$成立。则

$$|f\cdot g| = \lambda|f|^{1+\frac{p}{q}} = \lambda|f|^p \quad (a.e.)$$

从而得 $\displaystyle\int_E|f\cdot g|dx = \lambda\int_E|f|^p dx$，

$$\left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\lambda^q\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \lambda\left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \lambda\int_E|f|^p dx.$$

所以(H)中等号成立。

(2)证明：使闵可夫斯基不等式

$$\left(\int_E|f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E|g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdots (M)$$

(其中f、$g\in L_p(E)$，$p>1$) 中等式成立的充要条件是：存在常数$\lambda\geqslant 0$使$g=\lambda f$　$(a.e.)$或$f=0$　$(a.e.)$。

证　我们在证明不等式(M)的过程中用到下面二个不等式：

1)用到

$$|f+g|^p=|f+g|\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}\leqslant|f|\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}+|g|\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}.$$

易知，它取等号必须只需$|f+g|=|f|+|g|$成立。即f与g同号。

2)用到

$$\int_E|f|\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}dx\leqslant\left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_E|f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\cdots(1)$$

及

$$\int_E|g|\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}dx\leqslant\left(\int_E|g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_E|f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\cdots(2)$$

根据证明(1)不等式(1)、(2)同时成立的充要条件为：

有$\lambda_1\geqslant 0$使$|f+g|^{\frac{p}{q}}=\lambda_1|f|^{\frac{p}{q}}$或$f=0$，

有$\lambda_2\geqslant 0$使$|f+g|^{\frac{p}{q}}=\lambda_2|g|^{\frac{p}{q}}$或$g=0$，

(其中$a.e.$均省略，下同)。由1)知f、g同号，故上面二式可写为

有$\lambda_1\geqslant 0$使$(f+g)^{\frac{p}{q}}=\lambda_1 f^{\frac{p}{q}}$或$f=0$，

有$\lambda_2\geqslant 0$使$(f+g)^{\frac{p}{q}}=\lambda_2 g^{\frac{p}{q}}$或$g=0$。

(不妨设$f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$)。

若$f=0$及$g=0$至少有一个成立，(M)自然取等号。

设$f>0$，$g>0$，则$f+g>0$，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，

从而有　$f+g=\lambda_1'f$，$f+g=\lambda_2'g$　$(\lambda_1'>0,\ \lambda_2'>0)$。

有　$\lambda_1'f=\lambda_2'g$，$g=\dfrac{\lambda_1'}{\lambda_2'}f=\lambda f$　　$(\lambda>0)$。

综上所述知，不等式(M)取等号的充要条件为：$f=0\ (a.e.)$ 或存在常数$\lambda\geqslant0$使$g=\lambda f\ (a.e.)$成立。

28. 设$\{\varphi_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$是一标准正交系。如果它的所有一次组合$E=\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\varphi_i \,\middle|\, k\text{任意，}a_i\text{ 为任意常数}\right\}$于$L_2$处处稠密，则称$\{\varphi_n\}$为“封闭系统”。试证明：$\{\varphi_n\}$为“封闭系统”的充要条件是对于任意的$f\in L_2$，封闭方程

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)^2$$

成立。

证　必要性。设E于L_2稠密。则对任意$f\in L_2$，有$g_n=\sum\limits_{i=1}^{k_n}a_i^{(n)}\varphi_i\in E$，使得$\|g_n-f\|\to0$，$(n\to\infty)$。记$c_i=(f,\varphi_i)$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_n}c_i\varphi_i-f\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{k_n}a_i^{(n)}\varphi_i-f\right\|.$$

(由10题可知)。从而有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_n}c_i\varphi_i-f\right\|\to0,\ (n\to\infty).$$

而　$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{k_n}c_i^2+\left\|f-\sum_{i=1}^{k_n}c_i\varphi_i\right\|^2.$$

令$n\to\infty$便得

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2,$$

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)^2.$$

充分性。设对任意$f\in L_2$，$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)^2$成立。从而有

$\left\|\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i-f\right\|\to 0$，$(n\to\infty)$。这说明集合

$$E_1=\left\{\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\,\middle|\,n\text{任意},\ c_i=(f,\varphi_i),\ f\in L_2\right\}$$

于L_2稠密。而$E_1\subset E$。更有E于L_2稠密。即$\{\varphi_n\}$为"封闭系统"。

29. 设$\{\varphi_n\}$为一完全标准正交系，$\{\omega_n\}$为另一标准正交系。则$\{\omega_n\}$为完全的充要条件是：对每一个$\varphi_i\in\{\varphi_n\}$均有

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_i,\omega_n)^2.$$

证 必要性。设$\{\omega_n\}$为完全的标准正交系，则它亦为封闭系。从而对每个$\varphi_i\in L_2$，封闭方程

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_i,\ \omega_n)^2$$

均成立。

充分性。设对每个$\varphi_i\in\{\varphi_n\}$均成立等式

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_i,\omega_k)^2,\qquad (i=1,2,\cdots).$$

从而有 $\left\|\sum_{k=1}^{n}(\varphi_i,\omega_k)\omega_k-\varphi_i\right\|\to 0,(n\to\infty)\ (i=1,2,\cdots).$

若f与$\{\omega_n\}$正交，即$(f,\omega_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$。则有

$$\left(f,\ \sum_{k=1}^{n}(\varphi_i,\ \omega_k)\omega_k\right)=0.$$

令$n\to\infty$便得$(f,\varphi_i)=0$，$(i=1,2,\cdots)$。即f与$\{\varphi_n\}$亦正交。而$\{\varphi_n\}$为完全标准正交系，便有$f=0$。这说明$\{\omega_n\}$亦为完全的标准正交系。

30. $F[0,1]$为$[0,1]$上连续函数全体。规定距离为$\rho(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$，$(f、g\in F[0,1])$。则$F[0,1]$是不完备的距离空间。

证 易知$F[0,1]$在规定的距离下是距离空间. 下面证明它是不完备的空间。

为此，只需找$F[0,1]$中函数列$\{f_n\}$，满足$\rho(f_n,f_m)\to 0$ $(n,m\to\infty)$。但$\{f_n\}$在$F[0,1]$中无极限。

取 $$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{n},\\ \frac{1}{2}+\frac{n}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

(即$f_n(x)$在$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{n}$时是线性函数)。则$f_n\in F[0,1]$。

且有 $$\rho(f_n,f_m)=\int_0^1|f_n(x)-f_m(x)|\,dx=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\to 0,\quad (n,m\to\infty).$$

即$\{f_n\}$为$F[0,1]$中基本列。

记 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$

有 $\rho(f_n,f)=\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx=\frac{1}{2n}\to 0$，$(n\to\infty)$。

但$f(x)\bar{\in}F[0,1]$。若$\{f_n\}$在$F[0,1]$中有极限函数$g(x)$，则有$\rho(f_n,g)\to 0(n\to\infty)$。从而得

$$\rho(f,g)\leqslant\rho(f_n,f)+\rho(f_n,g)\to 0,\ (n\to\infty).$$

即有 $\rho(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0$。从而有 $f(x)=g(x)$ $(a.e.)$.这样一来 $g(x)$在$x=\frac{1}{2}$处必不连续.(因为这时必有$\{x_n\}$，$x_n\to\frac{1}{2}^-$，使 $g(x_n)=f(x_n)=0$，从而 $\lim\limits_{x_n\to\frac{1}{2}^-}g(x_n)=\lim\limits_{x_n\to\frac{1}{2}^-}f(x_n)=0$，又有 $\{t_n\}$，$t_n\to\frac{1}{2}^+$，使$g(t_n)=f(t_n)=1$，从而 $\lim\limits_{t_n\to\frac{1}{2}^+}g(x_n)=\lim\limits_{t_n\to\frac{1}{2}^+}f(x_n)=1$.这说明$g(x)$ 在$x=\frac{1}{2}$处的左右极限必不相等.即$g(x)$在$x=\frac{1}{2}$处不连续)。从而$g\bar{\in}F[0,1]$。得出矛盾。这说明$\{f_n\}$在$F[0,1]$中无极限。即$F[0,1]$是不完备的距离空间。

31. $R[0,1]$为$[0,1]$上全体(R)可积函数。规定距离为$\rho(f,g)=\left((R)\int_0^1(f(x)-g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$，$(f、g\in R[0,1])$.则$R[0,1]$

为不完备的距离空间. 这里规定若 $(R)\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx=0$，视为$f(x)=g(x)$。

证 易知$R[0,1]$在规定的距离下为距离空间. 为证其为不完备的空间，只需找出$R[0,1]$中函数列$\{f_n\}$，使$\rho(f_n,f_m)\to 0$ $(n,m\to\infty)$。但$\{f_n\}$在$R[0,1]$中无极限.

取$[0,1]$中具有正测度的完备疏朗集P，并记

$$G=[0,1]-P=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

$\{I_i\}(i=1,2,\cdots)$为$[0,1]$上可列个互无公共端点且与$[0,1]$也无公共端点的互不相交的开区间。$mG=\sum_{i=1}^{\infty} mI_i=1-mP<1$。(因$mp>0$)。取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in P,\\ 0, & x\in[0,1]-P=G.\end{cases}$$

由于P为疏朗集知$f(x)$在P中的点处不连续，从而$f(x)$的不连续点集合具有正测度。$f(x)$不(R)可积. 且知，与$f(x)$几乎处处相等的任何函数$g(x)$也不(R)可积.(因为若$f(x)=g(x)(a.e.)$，则有$E_0\subset[0,1]$, $mE_0=0$，使$f(x)=g(x)$, $(x\in[0,1]-E_0)$，由P的疏朗性知$g(x)$于$P-E_0$中点处不连续,而$m(P-E_0)=mP>0$。知$g(x)$的不连续点集合具有正测度.)

记 $G_n=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$，取

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]-G_n,\\ 0, & x\in G_n\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots).$$

则有$f_n\in R[0,1]$，且

$$\rho(f_n, f_m)_{(m>n)} = \left((R)\int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{m} mI_i \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \qquad (n, m \to \infty).$$

即$\{f_n\}$为$R[0,1]$中基本列。但$\{f_n\}$在$R[0,1]$中无极限.

若不然，设有$h(x) \in R[0,1]$使$\rho(f_n, h) \to 0$ $(n\to\infty)$,

即有 $$(R)\int_0^1 (f_n(x) - h(x))^2 dx$$

$$= (L) \int_0^1 (f_n(x) - h(x))^2 \, dx \to 0, \ (n\to\infty).$$

另一方面，有

$$(L)\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \sum_{i=n+1}^{\infty} mI_i \to 0 \ (n\to\infty).$$

从而有(以下均为(L)积分)：

$$\left(\int_0^1 (f(x) - h(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 (f(x) - f_n(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\int_0^1 (f_n(x) - h(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

即有 $$\int_0^1 (f(x) - h(x))^2 dx = 0,$$

$$f(x) = h(x) \quad (a.e.).$$

所以$h(x)$必不(R)可积，得出矛盾. 所以$\{f_n\}$在$R[0,1]$ 中无极限. 即$R[0,1]$为不完备的距离空间。

第七章　有界变差函数、司蒂吉斯积分

本章内容　单调函数的概念和性质，单调函数的微分及导函数的可积性；有界变差函数的定义、性质，有界变差函数的结构定理，连续有界变差函数的性质，连续函数为有界变差的充要条件；赫利选择原理；司蒂吉斯积分的定义、存在的充分条件及其与黎曼积分的关系，司蒂吉斯积分号下取极限的赫利定理；线性泛函数与司蒂吉斯积分关系的黎斯定理。

1. 函数 $f(x)$ 为有界变差的充分必要条件是存在增函数 $\varphi(x)$ 使得当 $x''>x'$ 时

$$f(x'')-f(x')\leqslant\varphi(x'')-\varphi(x').$$

证　$f(x)$ 为有界变差的充要条件是存在两个增函数 $\pi(x)$，$\nu(x)$ 使得 $f(x)=\pi(x)-\nu(x)$。

令 $\varphi(x)=\pi(x)$，则 $\varphi(x)$ 为单调函数，且对 $x''>x'$ 有

$$\begin{aligned}f(x'')-f(x')&=\varphi(x'')-\varphi(x')-[\nu(x'')-\nu(x')]\\&\leqslant\varphi(x'')-\varphi(x').\end{aligned}$$

从而必要性得证。

充分性的证明：令 $\pi(x)=\varphi(x)$，$\nu(x)=\varphi(x)-f(x)$，由所设知 $\pi(x)$ 为单调增函数，且对任意 $x''>x'$ 有

$$\nu(x'')-\nu(x')=\varphi(x'')-\varphi(x')-[f(x'')-f(x')]\geqslant 0,$$

所以$\nu(x)$为单调增函数，而$f(x)=\pi(x)-\nu(x)$，从而$f(x)$表为两个单调增函数之差，故$f(x)$为有界变差函数。

2. 设有限函数$f(x)$，在E中具有导函数$f'(x)$，且$|f'(x)|\leqslant K$，则 $m^*f(E)\leqslant Km^*E$。

证 设E为有界集．当$x\in E$，$f'(x)$存在且$|f'(x)|\leqslant K$,记$E_0=E(f'(x)=0)$，$E_1=E(f'(x)\neq 0)$，则$E=E_0\cup E_1$，$f(E)=f(E_0)\cup f(E_1)$。

先证 $m^*f(E_0)=0$。

对E_0和任给定的$\varepsilon>0$，必有开集$G_0\supset E_0$使得$mG_0<m^*E_0+\varepsilon$。任取$\eta>0$，对$x_0\in E_0$，由于$f'(x_0)=0$ 当h充分小(不妨设$h>0$，$h<0$同样考虑) 有：

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{h}<\eta$$

及 $d(x_0)=[x_0,\ x_0+h]\subset G_0$， (*)

对此h有 $|f(x_0+h)-f(x_0)|<h\eta$。

作闭区间$\Delta(x_0)=[f(x_0)-h\eta,\ f(x_0)+h\eta]$，$m\Delta(x_0)=2h\eta$。

显然，当$h\to 0^+$时，$m\Delta(x_0)\to 0$以及$f(d(x_0))\subset\Delta(x_0)$．此结果对任意$x_0\in E_0$均有线节$\Delta(x_0)$复盖，且$\Delta(x_0)$不缩为一点，其长度可任意地小，因此，线节集$\{\Delta(x),\ x\in E_0\}$依维他利意义复盖集$f(E_0)$。根据维他利复盖定理，可从线节集$\{\Delta(x),\ x\in E\}$中选出至多可列个两两不交的子集$\{\Delta(x_i)\}$使得

$m^*\left(f(E_0)-\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta(x_i)\right)=0$，其中 $\Delta(x_i)=[f(x_i)-\eta h_i,\ f(x_i)+\eta h_i]$，$d(x_i)=[x_i,\ x_i+h_i]$．由于$\{\Delta(x_i)\}$两两不交以及 $f(d(x_i))\subset\Delta(x_i)$，从而$\{d(x_i)\}$也是两两不交．所以

$$m^*f(E_0)\leqslant m^*\left(f(E_0)-\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta(x_i)\right)+m^*\left(\bigcup_i\Delta(x_i)\right)$$

$$=\sum_i m\Delta(x_i)=2\eta\sum_i h_i=2\eta m\left(\bigcup_i d(x_i)\right)$$

$$\leqslant 2\eta mG_0<2\eta(m^*E_0+\varepsilon).$$

由于ε，η可任意小，可知$m^*f(E_0)\leqslant 0$，所以$m^*f(E_0)=0$。

其次证　$m^*f(E_1)\leqslant Km^*E_1$.

对E_1作开集G_1使$E_1\subset G_1$且$mG_1<m^*E_1+\varepsilon$（ε为任意正数）．对任意$\eta>0$，$x\in E_1$，由于$|f'(x)|\leqslant K$，且$f'(x)\neq 0$，从而当h充分小时（不妨设$h>0$）有$0<\dfrac{|f(x+h)-f(x)|}{h}<K+\eta$且

$d(x)=[x,\ x+h]\subset G_1$，当$f'(x)>0$，取$\Delta(x)=[f(x),\ f(x+h)]$（当$f'(x)<0$，取$\Delta(x)=[f(x+h),\ f(x)]$）．由于$|f(x+h)-f(x)|>0$，知$\Delta(x)$不会变为一点，且 $m\Delta(x)=|f(x+h)-f(x)|<(K+\eta)h=(K+\eta)md(x)$，当$h\to 0$时$m\Delta(x)\to 0$。对每一$x\in E_1$，$\Delta(x)$复盖$f(x)$，从而$\{\Delta(x),\ x\in E_1\}$依维他利意义复盖$f(E_1)$．由维他利定理可从中选出可列个不相交的线节集$\{\Delta(x_i)\}$使得$m^*\left(f(E_1)-\bigcup_i\Delta(x_i)\right)=0$，且由$\Delta(x_i)$互不相交可推知相应的$d(x_i)$也互不相交．因此

$$m^*f(E_1)\leqslant m^*\Big(f(E_1)-\bigcup_i\Delta(x_i)\Big)+m^*\Big(\bigcup_i\Delta(x_i)\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}m\Delta(x_i)\leqslant(K+\eta)\sum_i md(x_i)$$

$$=(K+\eta)m\Big(\bigcup_i d(x_i)\Big)\leqslant(K+\eta)mG_1<(K+\eta)(m^*E_1+\varepsilon).$$

由于η、ε的任意性，所以

$$m^*f(E_1)\leqslant Km^*E_1.$$

最后，由于$E=E_0\cup E_1$，$f(E)=f(E_0)\cup f(E_1)$，所以 $m^*f(E)\leqslant m^*f(E_0)+m^*f(E_1)\leqslant Km^*E_1\leqslant Km^*E$.

3. 函数$f(x)$满足$|f(x'')-f(x')|\leqslant K|x''-x'|^{\alpha}\quad(\alpha>0)$时，称$f(x)$满足$\alpha$次李普希兹条件．则：

(i) 证明：当$\alpha>1$时，$f(x)\equiv$常数；

(ii) 试作一个不满足任何次李普希兹条件的有界变差函数；

(iii) 设$\alpha\in(0,1)$已给定，试作一函数满足α次李普希兹条件，但有无限的全变差．

证 (i) 由于$f(x)$满足$\alpha>1$次李普希兹条件，故对任意y，$x\in[a,b]$，有

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leqslant M|y-x|^{\alpha-1}$$

令 $y\to x$，由$\alpha>1$有$M|y-x|^{\alpha-1}\to0$，从而

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0.$$

由于x的任意性，得知$f(x)\equiv$常数．

(ii) 作函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ -\dfrac{1}{\ln x} & 0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

显然，$f(x)$为$\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$上的单调增函数，从而全变差$\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f)$ $=\dfrac{1}{\ln 2}$为有界．但此函数不满足任何$\alpha(\alpha>0)$次李普希兹条件．事实上，由$f(x)\neq$常数，由(i) $\alpha>1$不可能．当$0<\alpha\leqslant 1$时，取$x_1=0$，$x_2<\dfrac{1}{2}$，利用微分中值定理有$\xi\in(x_1,\ x_2)$使：

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)^{\alpha}}=\frac{f'(\xi)}{\alpha\xi^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha\xi^{\alpha}\ln^2\xi}\to+\infty(x_2\to 0^+).$$

所以，对任意正数M，可取x_2充分小使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|>M|x_2-x_1|^{\alpha}$$

因此，对任何已给的$\alpha>0$，上述$f(x)$不满足α次李普希兹条件．

(iii) 对任意给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，考虑收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$，其和记为$S$，又记$S_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}$，$dn\triangleq\dfrac{S_n+S_{n-1}}{2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，在$S_0=0$，$[0,\ S]$上作函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\ \dfrac{x-S_{n-1}}{d_n-S_{n-1}}, & S_{n-1}\leqslant x<d_n,\\ \dfrac{1}{n}\ \dfrac{S_n-x}{S_n-d_n}, & d_n\leqslant x<S_n,\ (n=1,\ 2,\ \cdots)\\ 0 & x=S\end{cases}$$

此函数为[0，S]上的锯齿形连续函数，当$x \to S$时$f(x) \to 0$。下面证明$f(x)$满足α次李普希兹条件但全变差为无穷。

首先证明$\bigvee_{0}^{S}(f) = +\infty$。

因为$f(x)$在[0，S]上逐段单调，所以

$$\bigvee_{0}^{S_n}(f) = \sum_{k=1}^{n}\left[\bigvee_{S_{k-1}}^{d_k}(f) + \bigvee_{d_k}^{S_k}(f)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(|f(d_k) - f(S_{k-1})| + |f(S_k) - f(d_k)|\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}$$

从而 $$\bigvee_{0}^{S}(f) \geqslant \lim_{n\to\infty}\bigvee_{0}^{S_n}(f) = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$$

这说明$f(x)$在[0，S]上不是有界变差函数。

其次证明：$f(x)$在[0，S]上满足α次李普希兹条件．分几种情况来证明。

1° 当x_1，$x_2 \in [S_{n-1}, d_n]$时$(n = 1, 2, \cdots)$有

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \frac{2}{n(S_n - S_{n-1})}|x_2 - x_1|$$

$$= \frac{2n^{\frac{1}{\alpha}}}{n}|x_2 - x_1|^{1-\alpha}\cdot|x_2 - x_1|^{\alpha}$$

$$\leqslant \frac{2n^{\frac{1}{\alpha}}}{n}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}|x_2 - x_1|^{\alpha} = 2|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

所以$f(x)$在$[S_{n-1}, d_n]$上满足α次李普希兹条件。

2° 当x_1，$x_2 \in [d_n, S_n]$时$(n = 1, 2, \cdots)$同理可证：

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2\,|x_2-x_1|^{\alpha}$$

此时也满足 α 次李普希兹条件.

3° 当 $x_1, x_2\in[0, S]$, 不妨设 $x_1<x_2$, 从而或有 $x_1\in[S_{n_1-1}, d_{n_1}]$, $x_2\in[S_{n_2-1}, d_{n_2}]$, $n_1<n_2$ (对其他情形可类似得到证明). 由于 $f([S_{n_1-1}, d_{n_1}])=\left[0, \dfrac{1}{n_1}\right]$, $f([S_{n_2-1}, d_{n_2}])=\left[0, \dfrac{1}{n_2}\right]$, 且 $f(x)$ 连续, $n_1<n_2$, 故对值 $f(x_2)$ 相应地在 $[S_{n_1-1}, d_{n_1}]$ 中取到一点 x_2' 使得 $f(x_2')=f(x_2)$. 对 $x_1, x_2'\in[S_{n_1-1}, d_{n_1}]$ 利用(1°)可知:

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2')-f(x_1)|\leqslant 2|x_2'-x_1|^{\alpha}$$

$$<2|x_2-x_1|^{\alpha}\quad (\text{因}\,|x_2'-x_1|<|x_2-x_1|).$$

综上我们证明了 $f(x)$ 满足 α 次李普希兹条件, 但它不是有界变差函数.

4. 如果 $f(x)$ 满足 α 次李普希兹条件, $g(x)$ 满足 β 次李普希兹条件, 则当 $\alpha+\beta>1$ 时, 积分 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 存在.

证 对 $[a, b]$ 的分法 T, 作部分和

$$\sigma(T, \zeta)\triangleq\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

其中分法 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, ζ_i 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任一点.

由题设可知, 存在常数 $M>0$, 使得对于任意 $x_1, x_2\in[a, b]$ 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M^{\frac{1}{2}}|x_2-x_1|^{\alpha}$$

及 $|g(x_2)-g(x_1)|\leqslant M^{\frac{1}{2}}|x_2-x_1|^{\beta}$.

下面分几步来完成我们的证明。

(i) 对任意分法T有：

$$|\sigma(T,\xi)-\sigma(T,\xi')|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\xi_i')||g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\xi_i'|^{\alpha}|x_i-x_{i-1}|^{\beta}$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|^{\alpha+\beta-1}|x_i-x_{i-1}|$$

$$\leqslant M\delta_T^{\alpha+\beta-1}(b-a)=M\delta_T^{r}(b-a).$$

其中$\delta_T=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{(x_i-x_{i-1})\}$，$r=\alpha+\beta-1$.

(ii) 为了对不同分法的部分和作比较，我们先引入下述概念。

分法$\widetilde{T}$称为分法T的一次加细分法是指：T的分点也是$\widetilde{T}$的分点，且在T的每个子区间内最多插入$\widetilde{T}$的一个分点。

设$\widetilde{T}$为T的一次加细分法，对分法T的部分和，我们这样取点：当$[x_{i-1},x_i]$中未插入$\widetilde{T}$的分点时，取$\xi_i^0=x_i$，当$[x_{i-1},x_i]$中有$\widetilde{T}$的分点插入时，其插入的分点为η_i，取$\xi_i^0=\eta_i$. 这样的部分和既可视为分法T的部分和，也可视为分法$\widetilde{T}$的部分和，记此部分和为$\sigma^*(T,\xi^0)$。又设$\sigma(\widetilde{T},\xi)$为分法$\widetilde{T}$的任一部分和，$\sigma(T,\xi')$为分法$T$的任一部分和，则

$$|\sigma(\widetilde{T},\xi)-\sigma(T,\xi')|\leqslant|\sigma(\widetilde{T},\xi)-\sigma^*(T,\xi^0)|$$

$$+|\sigma^*(T,\ \xi^0)-\sigma(T,\xi)|\leqslant M(b-a)\delta^r_{\tilde{T}}$$

$$+M(b-a)\delta^r_T\leqslant 2M(b-a)\delta^r_T.$$

(iii) 设 T_n为$[a,b]$的2^n等分法：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{2^n}=b$，$\delta_n=b-a/2^n$，则$T_{n+1}$为$T_n$的一次加细分法，又$\overline{\sigma_n}$表示对应分法$T_n$取$\xi_i=x_i$的特定部分和，由（ii）可知

$$|\overline{\sigma_{n+1}}-\overline{\sigma_n}|\leqslant 2M(b-a)\delta^r_n=2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^n$$

所以 $$|\overline{\sigma_{n+m}}-\overline{\sigma_n}|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|\overline{\sigma_{n+i}}-\overline{\sigma_{n+i-1}}|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^{i+n-1}$$

$$\leqslant 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\frac{1}{1-\frac{1}{2^r}}\left(\frac{1}{2^r}\right)^n\longrightarrow 0(n\to\infty)$$

所以$\{\overline{\sigma_n}\}$为柯西基本列．从而存在常数A使得

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\sigma_n}=A.$$

(iv) 下面证明 积 分$\int_a^b f(x)dg(x)$ 存在且

$$\int_a^b f(x)dg(x)=A$$

也就是要证明：对于任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\delta_T<\delta$恒有$|\delta(T,\ \xi)-A|<\varepsilon$（对一切分法和任意取点$\xi$均成立）。

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^n$

收敛，所以，对任给$\varepsilon>0$，存在N_0有

$$\sum_{n>N_0} 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

取 $\delta_{N_0} = \dfrac{b-a}{2^{N_0}}$，$T_{N_0}$ 为相应于子区间长为δ_{N_0}的等分法，又任意取定一个分法T，使得 $\delta_T < \delta_{N_0}$，从而存在正整数 M_0，使 $\delta_{M_0-1} < \delta_T \leqslant \delta_{M_0}$，其中 $\delta_{M_0} = \dfrac{b-a}{2^{M_0}}$，相应于子区间长为 δ_{M_0} 的等分法为T_{M_0}，显然$M_0 \geqslant N_0$。作分法$\widetilde{T}_{M_0} = T \cup T_{M_0}$（即$\widetilde{T}_{M_0}$的分点是$T$和$T_{M_0}$的分点之和）。由于$\delta_{M_0} \geqslant \delta_T$，故不可能有$T_{M_0}$中的两个分点同时插入分法$T$的某一子区间中，所以$\widetilde{T}_{M_0}$是$T$的一次加细分法．由（ii）有：

$$|\sigma(T,\ \xi) - \sigma(\widetilde{T}_{M_0},\ \xi')| \leqslant 2M(b-a)\delta_T^r$$

$$\leqslant 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^{M_0} < \frac{\varepsilon}{3} \text{（因}M_0 \geqslant N_0\text{）}$$

又对上述任意取定的分法T，记$\delta_1 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}) > 0$，取$n$充分大使得$n > M_0$且$\dfrac{b-a}{2^n} < \delta_1$，对此$n$作$\widetilde{T}_k = T \cup T_k$（$k = M_0$，$M_0+1$，…，$n$）。仿上可知$\widetilde{T}_n$是$T_n$的一次加细分法，所以

$$|\sigma(\widetilde{T}_n,\ \xi) - \overline{\sigma}_n| \leqslant 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

（因$n > M_0 \geqslant N_0$）

另一方面，显然$\widetilde{T}_{k+1} = T \cup T_{k+1}$为$\widetilde{T}_k$ 的一次 加 细 分 法（$k = M_0$，M_0+1，…，n）。所以

$$|\sigma(\widetilde{T}_{k+1},\ \xi) - \sigma(\widetilde{T}_k,\ \xi')| \leqslant 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^k$$

$(k=M_0, M_0+1, \cdots, n)$.

由此可知

$$|\sigma(\widetilde{T}_{M_0}, \xi^{(M_0)})-\sigma(\widetilde{T}_n, \xi^{(n)})| \leqslant \sum_{k=M_0}^{n-1} |\sigma(\widetilde{T}_k, \xi^{(k)})$$

$$-\sigma(\widetilde{T}_{k+1}, \xi^{(k+1)})|$$

$$\leqslant \sum_{k=M_0}^{n-1} 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^k$$

$$\leqslant \sum_{k=N_0}^{\infty} 2M(b-a)^{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2^r}\right)^k < \frac{\varepsilon}{3}$$

综上所述，对于任给$\varepsilon>0$，取$\delta_{N_0}=\dfrac{b-a}{2^{N_0}}$（$N_0$ 由前决定，依赖于ε）。当分法T 的 $\delta_T<\delta_{N_0}$ 时，对于这个分法 T，取n 使$\dfrac{b-a}{2^n}<\delta_1=\min\limits_i(x_i-x_{i-1})$，则对于分法$T$所作的部分和 $\sigma(T,\xi)$ 有估计式：

$$|\sigma(T, \xi)-\overline{\sigma_n}| \leqslant |\sigma(T, \xi)-\sigma(\widetilde{T}_{M_0}, \xi')|$$

$$+|\sigma(\widetilde{T}_{M_0}, \xi')-\sigma(\widetilde{T}_n, \xi'')|+|\sigma(\widetilde{T}_n, \xi'')-\overline{\sigma_n}|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

其中$\widetilde{T}_{M_0}$ 和$\widetilde{T}_n$如前所取，且此式对一切充分大$n\left(只要\dfrac{b-a}{2^n}<\sigma_1\right)$都成立。从而令$n\to\infty$有

$$|\sigma(T, \xi)-A| \leqslant \varepsilon.\ （因\ \lim_{n\to\infty}\overline{\sigma_n}=A）$$

这就证明了，对任给$\varepsilon>0$，只要分法T的$\delta_T<\delta_{N_0}=\dfrac{b-a}{2^{N_0}}$，就恒有

$$|\delta(T,\ \xi)-A|\leqslant\varepsilon.$$

这就是说：$\int_a^b f(x)dg(x)=A$.

5. 设 $f(x)$ 为连续函数，$g(x)$ 为有界变差函数，则 $\int_a^x f(x)dg(x)$ 为有界变差函数，且此函数在 $g(x)$ 的连续点上也连续。

证 记 $F(x)=\int_a^x f(x)dg(x)$ 只要证：

对任意分法 T, $\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|$ 一致有界。

因为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，$g(x)$ 为有界变差函数，故积分 $F(x)=\int_a^x f(x)dg(x)$ 有意义，且 $|f(x)|\leqslant M$，对一切 $x\in[a,b]$，M 为正常数。所以

$$\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dg(x)\right|$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\leqslant M\bigvee_a^b(g)$$

即 $F(x)$ 为 $[a,\ b]$ 上的有界变差函数。

另一方面，由前有

$$|F(x+h)-F(x)|\leqslant M\bigvee_x^{x+h}(g)=M(\pi(x+h)$$

$$-\pi(x)) \qquad (*)$$

由定理（$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的有界变差函数。如 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的连续点，则 x_0 也是 $\bigvee_a^x(f)$ 的连续点）知：$g(x)$ 连续点也是

$\pi(x)=\bigvee_a^x g(x)$连续点。也是$F(x)$的连续点。

6. 对于数列u_0，u_1，$\cdots u_n\cdots$作$\Delta^\circ u_n=u_n$，$\Delta^{k+1}u_n=\Delta^k u^n-\Delta^k u_{n+1}$，要有增加函数$g(x)$适合

$$\int_0^1 x^n dg(x)=u_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

的充分必要条件是对于所有的k及n下面的式子

$$\Delta^k u_n \geqslant 0$$

都成立。

证 必要性：由"Δ"的意义，不难用归纳法证明：

$$\Delta^k u_n = C_k^0 u_n - C_k^1 u_{n+1} + \cdots + (-1)^k C_k^k u_{n+k}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i u_{n+i}$$

事实上，当$k=1$，等式显然成立。

若 $k=m$等式成立即$\Delta^m u_n=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i u_{n+i}$则当$k=m+1$

时有

$$\Delta^{m+1}u_n=\Delta^m(\Delta u_n) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i C^i{}_m \Delta u_{n+i}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C^i{}_m(u_{n+i}-u_{n+i+1})$$

$$=C_m^0 u_n + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i(C^i{}_m + C_m^{i-1})u_{n+i}$$

$$+(-1)^{m+1}C_m^m u_{n+m+1}$$

$$=C_{m+1}^{0}u_{n}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i}C_{m+1}^{i}u_{n+i}$$

$$+(-1)^{m+1}C_{m+1}^{m+1}u_{n+m+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^{i}C_{m+1}^{i}u_{n+i}.$$

由假设$g(x)$为[0，1]上增函数，且

$$u_{n}=\int_{0}^{1}x^{n}dg(x)$$

故对任意n和k有

$$\Delta^{k}\mu_{n}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}C_{k}^{i}\int_{0}^{1}x^{n+i}dg(x)$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}C_{k}^{i}x^{i}\right)x^{n}dg(x)$$

$$=\int_{0}^{1}(1-x)^{k}x^{n}dg(x)\geqslant 0.$$

充分性：对一切m作阶梯函数列$\{g_m(x)\}(m=0,1,2,\cdots)$：

$$g_{m}(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ C_{m}^{0}\Delta^{m}\mu_{0}, & 0<x<\dfrac{1}{m},\\ \sum\limits_{i=0}^{j}C_{m}^{i}\Delta^{m-i}\mu_{i}, & \dfrac{j}{m}\leqslant x<\dfrac{j+1}{m}(j=1,2,\cdots,m-1),\\ \sum\limits_{i=0}^{m}C_{m}^{i}\Delta^{m-i}\mu_{i}, & x=1.\end{cases}$$

由于对任意k，n都有$\Delta^{k}\mu_{n}\geqslant 0$，知$g_m(x)$为[0，1]上不减的阶梯函数（$m=0$，1，2…），且

$$\bigvee_{0}^{1}(g_{m})=g_{m}(1)=\mu_{0}\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

事实上，此式可用归纳法得到证明：

当$m=0$，显见$g_0(1)=\mu_0$。

若 $g_m(1)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\Delta^{m-i}\mu_i=\mu_0$，则

$$g_{m+1}(1)=C_{m+1}^0\Delta^{m+1}\mu_0+\sum_{i=1}^{m+1}C_{m+1}^i\Delta^{m+1-i}\mu_i$$

$$=C_m^0\Delta^m\mu_0-C_m^0\Delta^m\mu_1+C_{m+1}^1\Delta^m\mu_1+\sum_{i=2}^{m+1}C_{m+1}^i\Delta^{m+1-i}\mu_i$$

$$=(C_m^0\Delta^m\mu_0+C_m^1\Delta^{m-1}\mu_1)-C_m^1\Delta^{m-1}\mu_2+\sum_{i=2}^{m+1}C_{m+1}^i\Delta^{m+1-i}\mu_i$$

$$=\cdots$$

$$=C_m^0\Delta^m\mu_0+C_m^1\Delta^{m-1}\mu_1+\cdots+C_m^m\Delta^0\mu_m$$
$$-C_m^m\Delta^0\mu_{m+1}+C_{m+1}^{m+1}\Delta^0\mu_{m+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\Delta^{m-i}\mu_i=\mu_0$$

由此可见，$\{g_n(x)\}$为单调增函数且对n一致有界。根据赫利选择原理，存在子序列$\{g_{m_i}(x)\}$使得$g_{m_i}(x)\longrightarrow g(x)$，当$k\to\infty$时对一切$x\in[a,b]$成立。显然，$g(x)$也为单调增函数，且$g(x)\leqslant u_0$，故有：

$$\int_0^1 x^n dg(x)=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 x^n dg_{m_k}(x)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{m_k}\left(\frac{i}{m_k}\right)^n C_{m_k}^i\Delta^{m_k-i}\mu_i \qquad (*)$$

现在计算 $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{i}{m}\right)^n C_m^i\Delta^{m-i}\mu_i$的值

由于 $\Delta^n\mu_k=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i\mu_{k+i}$和$(1-x)^nx^k=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^ix^{k+i}$

将Δ对应 $1-x$、μ_k对应x^k，它们具有完全相同的形式，因而可建立下述一一对应关系：

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{i}{m}\right)^nC_m^i\Delta^{m-i}\mu_i\longleftrightarrow\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{i}{m}\right)^nC_m^i(1-x)^{m-i}x^i$$

而其中右边的和式恰为函数 x^n 的第 m 次伯恩斯坦多项式 $B_m(x^n)$，再由维尔斯特拉斯定理有

$$\lim_{m\to\infty}B_m(x^n)=x^n\ (n=0,1,2,\cdots)$$

完全类似于那里的推理，只要将$1-x$换为Δ，x^k换为u_k，我们将有：

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{i}{m}\right)^nC_m^i\Delta^{m-i}u_i=u_n\ (n=0,1,2,\cdots)$$

再由（*）即有

$$\int_0^1x^ndg(x)=u_n\ (n=0,1,2,\cdots)$$

7. 承用前题的记号，要有有界变差函数$g(x)$使得

$$\int_0^1x^ndg(x)=u_n\ (n=0,1,2,\cdots)$$

成立的充分必要条件是对于所有的n

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k|\Delta^{n-k}u_k|\leqslant K.$$

证 必要性：由于$g(x)$为有界变差函数，故$g(x)=g_1(x)$

$-g_2(x)$，其中$g_1(x)$，$g_2(x)$为单调增函数，类似第6题必要性的证明可知，对一切k，n有

$$\Delta^k u_n = \int_0^1 (1-x)^k x^n dg(x)$$

$$= \int_0^1 (1-x)^k x^n dg_1(x) - \int_0^1 (1-x)^k x^n dg_2(x)$$

其中$\int_0^1 (1-x)^k x^n dg_1(x)$，$\int_0^1 (1-x)^k x^n dg_2(x)$非负。

所以

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k} u_k|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left\{ \int_0^1 (1-x)^{n-k} x^k dg_1(x) \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-x)^{n-k} x^k dg_2(x) \right\}$$

$$= \int_0^1 (x+(1-x))^n dg_1(x) + \int_0^1 (x+(1-x))^n dg_2(x)$$

$$= g_1(1) - g_1(0) + g_2(1) - g_2(0) = K.$$

充分性：类似于第6题充分性的证明，可同样构造一个阶梯函数$g_m(x)$，在不连续点$x=\dfrac{i}{m}$ $(i=0,1,2,\cdots,m)$的跳跃度为

$$C_m^i \Delta^{m-i} u_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

从而 $|g_m(x)| \leqslant K$以及 $\bigvee_0^1 (g_m) \leqslant \sum_{i=0}^{m} C_m^i |\Delta^{m-i} u_i| \leqslant K$

$(m=0,\ 1,\ \cdots)$。

这说明$\{g_m(x)\}$为一致有界且全变差也是一致有界的有界变差函数列。根据赫利选择定理$\{g_m(x)\}$有收敛子序列$\{g_{m_k}(x)\}$

收敛到有界变差函数$g(x)$，且

$$\int_0^1 x^n dg(x)=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 x^n dg_{m_k}(x).$$

完全和第 6 题一样可证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 x^n dg_{m_k}(x)=u_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

从而充分性得证。

8. 证明黎斯定理是上述豪司道夫定理的一个推论。

证 设$\Phi(f)$为$C[0, 1]$上有界线性泛函，即满足：

1) $\Phi(a_1 f_1+a_2 f_2)=a_1\Phi(f_1)+a_2\Phi(f_2)$,

2) $|\Phi(f)|\leqslant K\|f\|$, $\|f\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

要证明存在有界变差函数$g(x)$，对任意$f(t)\in c[0,1]$有

$$\Phi(f)=\int_0^1 f(x)dg(x).$$

令 $u_k=\Phi(x^k)\quad(k=0, 1, 2, \cdots)$

则 $\Delta u_k=u_k-u_{k+1}=\Phi(x^k)-\Phi(x^{k+1})=\Phi(x^k(1-x))$,

$$\Delta^2 u_k=\Delta u_k-\Delta u_{k+1}=\Phi(x^k(1-x)^2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta^l u_k=\Delta^{l-1}u_k-\Delta^{l-1}u_{k+1}=\Phi(x^k(1-x)^{l-1})$$
$$-\Phi(x^{k+1}(1-x)^{l-1})=\Phi(x^k(1-x)^l).$$

从而对一切m有

$$\sum_{i=0}^m C_m^i|\Delta^{m-i}u_i|=\sum_{i=0}^m C_m^i|\Phi(x^i(1-x)^{m-i})|$$
$$=\left|\Phi\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon_i C_m^i x^i(1-x)^{m-i}\right)\right|$$

$$\leqslant K\left\| \sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i C_m^i x^i (1-x)^{m-i} \right\|$$

$$\leqslant K.$$

其中 $\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{当}\Phi(x^i(1-x)^{m-i}) \geqslant 0 \\ -1, & \text{当}\Phi(x^i(1-x)^{m-i}) < 0 \end{cases}$

利用第 7 题充分性的结果，知存在有界变差函数$g(x)$使得

$$\Phi(x^n) = u_n = \int_0^1 x^n dg(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

对任意$f(x) \in C[0, 1]$，利用伯恩斯坦定理有多项式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

在$[0, 1]$上一致趋于$f(x)$.

利用$\Phi(f)$的线性性，我们有

$$\Phi(B_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \Phi(x^k (1-x)^{n-k})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dg(x)$$

$$= \int_0^1 B_n(x) dg(x).$$

由于 $B_n(x)$在$[0, 1]$上一致趋于 $f(x)$以及$\Phi(f)$对f的连续性，上式令 $n \to \infty$得

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(B_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 B_n(x) dg(x)$$

$$= \int_0^1 f(x) dg(x).$$

从而命题得证

9. 如果对于任一正数ε，有一个正数δ，当$|x''-x'|<\delta$时，不等式$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$，对于$F=\{f(x)\}$中一切函数$f(x)$都成立，则称$F$是由等度连续函数所成之集。假设有常数$k$，使得$|f(x)|\leqslant k$，对于$F$中任何函数$f(x)$均成立，那么在$F$中可以选出一列一致收敛的函数列。

证 设Q为$[a, b]$中全体有理数，Q为可数集，由定理（设在$[a,b]$上定义着无限个函数$H=\{f(x)\}$。如果有常数k，使得$|f(x)|<k$，对于一切$f\in H$均成立，那末对于$[a, b]$中任何一个可列集E，从函数族H中可以选出一列函数$\{f_n(x)\}$，使得在E中每点收敛）知：在F中存在互异函数列$\{f_n(x)\}$，在Q上点点收敛。我们要证明这个函数列在$[a, b]$上点点收敛，也即证明：对任一$x\in[a, b]$，$\{f_n(x)\}$为柯西基本列。

事实上，任给$\varepsilon>0$，由于$\{f_n(x)\}$的等度连续性，存在$\delta>0$，对$(x-\delta, x+\delta)$中一切有理数r有

$$|f_n(x)-f_n(r)|<\frac{\varepsilon}{3}(n=1, 2, \cdots),$$

又由$\{f_n(r)\}$为收敛序列，故对于$\varepsilon>0$，存在N，当n，$m\geqslant N$有

$$|f_n(r)-f_m(r)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

从而，当n，$m\geqslant N$有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|&\leqslant|f_n(x)-f_n(r)|\\&\quad+|f_n(r)-f_m(r)|+|f_m(r)-f_m(x)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明$\{f_n(x)\}$为基本列，所以存在函数$\varphi(x)$使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)。$$

下面证 $\varphi(x)$为连续函数，由$\{f_n(x)\}$的等度连续性，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x'-x''|<\delta$有

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (n=1, 2, \cdots)。$$

令$n\to\infty$得：$|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

最后证明：$f_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛于$\varphi(x)$。

由于 $\varphi(x)$连续，$\{f_n(x)\}$等度连续，所以任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x'-x''|<\delta$有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_n(x')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

从而 $$|f_n(x'')-\varphi(x'')-(f_n(x')-\varphi(x'))|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

对上述δ，将$[a, b]S$等分为$a=x_0<x_1<\cdots<x_S=b$使得子区间长$\frac{b-a}{S}<\delta$. 对每一x_i，由于

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_i)=\varphi(x_i) \quad (i=0, 1, \cdots, S)$$

所以，任给$\varepsilon>0$，存在N_i，当$n\geqslant N_i$有

$$|f_n(x_i)-\varphi(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (i=0, 1, \cdots, S)$$

取$N=\max\{N_0, N_1, \cdots, N_S\}$，当$n\geqslant N$有

$$|f_n(x_i)-\varphi(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ S).$$

从而对任给$\varepsilon>0$及任意$x\in[a,\ b]$，存在x_{i_0}使得$|x-x_{i_0}|<\dfrac{b-a}{S}<\delta$，当$n\geqslant N$时有

$$|f_n(x)-\varphi(x)|\leqslant|f_n(x)-\varphi(x)-[f_n(x_{i_0})-\varphi(x_{i_0})]|$$
$$+|f_n(x_{i_0})-\varphi(x_{i_0})|<\varepsilon.$$

这就证明了$f_n(x)$在$[a,\ b]$上一致收敛于$\varphi(x)$。

10．根据巴拿赫定理，对连续函数证明等式

$\bigvee\limits_a^b(f)=\bigvee\limits_a^c(f)+\bigvee\limits_c^b(f)$，其中$a<c<b$。

证　由于$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，所以

$f(x)$在$[a,\ c]$上有最大值、最小值为M_1、m_1；

$f(x)$在$[c,\ b]$上有最大值、最小值为M_2、m_2；

$f(x)$在$[a,\ b]$上有最大值、最小值为M、m。

又设 $N_1(y)$表示当 $m_1\leqslant y\leqslant M_1$时，$f(x)=y$在$[a,\ c]$上根的个数；

$N_2(y)$ 表示当 $m_2\leqslant y\leqslant M_2$时，$f(x)=y$在$[c,\ b]$上根的个数；

$N(y)$ 表示当$m\leqslant y\leqslant M$时，$f(x)=y$在$[a,\ b]$上根的个数。

由巴拿赫定理有

$$\int_{m_1}^{M_1}N_1(y)dy=\bigvee_a^c(f),\qquad\int_{m_2}^{M_2}N_2(y)dy=\bigvee_c^b(f),$$

及 $\int_m^M N(y)dy=\bigvee_a^b(f)$.

又显见，$m\leqslant m_1\leqslant M_1\leqslant M$，$m\leqslant m_2\leqslant M_2\leqslant M$，且 $N_i(y)=0$，当 $y\,\bar{\in}\,[m_i,\ M_i]$ 时 $(i=1,\ 2)$ 以及

$$N(y)=\begin{cases}N_1(y)+N_2(y), & y\neq y_c\quad (y_c=f(c)),\\ N_1(y)+N_2(y)-1, & y=y_c.\end{cases}$$

也就是说，在 $[m,\ M]$ 上下述等式几乎处处成立：

$$N(y)=N_1(y)+N_2(y).$$

从而有
$$\begin{aligned}\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)&=\int_{m_1}^{M_1}N_1(y)\,dy\\&\quad+\int_{m_2}^{M_2}N_2(y)dy\\&=\int_m^M N_1(y)\,dy+\int_m^M N_2(y)dy\\&=\int_m^M(N_1(y)+N_2(y))dy=\int_m^M N(y)dy\\&=\bigvee_a^b(f).\end{aligned}$$

11. 区间上任何两个单调函数，若在一个稠密集上相等，则它们有相同的连续点和可导点，且在连续点函数值相等，在可导点的导数相等(在导数有限的情况下)，在不连续点的跳跃度相等.

证 不妨设 $f(x)$，$g(x)$ 同为区间 Δ 上的单调增函数，且在 Δ 的稠密集 A 上有 $f(x)=g(x)$.

首先证明关于连续点的结论：

记　$M=\{f(x)$连续点的全体$\}$；

　　$N=\{g(x)$连续点的全体$\}$。

任取$x_0\in M$，则$f(x_0+0)=f(x_0)=f(x_0-0)$，又因$g(x)$单调，故$g(x_0+0)$，$g(x_0-0)$存在。(不妨设x_0为Δ的内点，两个端点证明类似，只要考虑单侧极限即可)。

取$\delta_n\searrow 0(n\to\infty)$，因$A$在$\Delta$内稠密，故在$(x_0-\delta_n,\ x_0)$内至少存在一点$x_n\in A$，且不妨可使$x_n\nearrow x_0$，此时，$f(x_n)=g(x_n)$且当$n\to\infty$时，$f(x_n)\nearrow f(x_0-0)$，$g(x_n)\nearrow g(x_0-0)$，由极限的唯一性知$f(x_0-0)=g(x_0-0)$。

同理可证：$f(x_0+0)=g(x_0+0)$。

再由$g(x)$在x_0点单调，$f(x)$在x_0点连续得

$$f(x_0)=g(x_0)=g(x_0+0)=g(x_0-0).$$

从而$x_0\in N$，这就证明了$M\subset N$，且$f(x_0)=g(x_0)$。

由于$f(x)$，$g(x)$处于完全对称的地位，故同理可证：$N\subset M$。这就证明了$f(x)$，$g(x)$有相同的连续点，且在这些点上函数值相等。

其次证明关于可导点的结论：

设　$E=\{f(x)$可导点(有限导数)的全体$\}$，

　　$F=\{y(x)$可导点(有限导数)的全体$\}$。

对任意$x_0\in E$，由$f'(x_0)$有限知x_0为$f(x)$的连续点，从而亦为$g(x)$的连续点，且$g(x_0)=f(x_0)$(不妨设x_0为Δ的内点)。

任取$h_n\searrow 0(n\to\infty)$，由于$A$在$\Delta$中稠密，所以当$n$充分大，区间$(x_0+h_n,\ x_0+h_n+h_n{}^2)\subset\Delta$，且在其内至少有一点$x_0+h_n$

$+\delta_n\in A$ $(0<\delta_n<h_n^2)$，从而 $f(x_0+h_n+\delta_n)=g(x_0+h_n+\delta_n)$，

且 $\frac{\delta_n}{h_n}\to 0$ $(n\to\infty)$

所以 $$\frac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n}\leqslant\frac{g(x_0+h_n+\delta_n)-g(x_0)}{h_n} \quad (*)$$

$$=\frac{f(x_0+h_n+\delta_n)-f(x_0)}{h_n+\delta_n}\left(1+\frac{\delta_n}{h_n}\right)\to f'(x_0)\,(n\to\infty)$$

同样考虑区间 $(x_0+h_n-h_n^2,\ x_0+h_n)$，当 n 充分大时有 A 中一点 $x_0+h_n-\delta_n\in(x_0+h_n-h_n^2,\ x_0+h_n)$；$0\leqslant\delta_n<h_n^2$，所以

$\frac{\delta_n}{h_n}\to 0$，且

$$\frac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n}\geqslant\frac{g(x_0+h_n-\delta_n)-g(x_0)}{h_n} \quad (**)$$

$$=\frac{f(x_0+h_n-\delta_n)-f(x_0)}{h_n-\delta_n}\left(1-\frac{\delta_n}{h_n}\right)\to f'(x_0)\ (n\to\infty)$$

由(*)、(**)可知

$$\lim_{h_n\to 0^+}\frac{g(x_0+h_n)-g(x_0)}{h_n}=f'(x_0)$$

由于$\{h_n\}$为任意趋于0^+的序列，故有

$$g'(x_0+0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

同理可证：$g'(x_0-0)=f'(x_0)$.

这证明了：$x_0\in F$且$g'(x_0)=f'(x_0)$.

由于$f(x)$,$g(x)$地位是对称的,类似可证：$F\subset E$，且对$x_0\in F$有$f'(x_0)=g'(x_0)$.

最后，对于不连续点，由第一部分证明可知：$f(x_0+0)=$

$g(x_0+0)$，$f(x_0-0)=g(x_0-0)$，从而在不连续点的跳跃度相等。

12. 证明区间$[a, b]$上的有限函数在任一点的导出数全体是一个闭集。

证 设$x_0\in[a, b]$，记E为x_0点的导出数全体。

若E为有限集，显然E为闭集。

若E为无限集，只要证：若λ_0为E的极限点，则$\lambda_0\in E$。

由λ_0为E的极限点，存在$\lambda_n\in E$使得$\lambda_n\to\lambda_0(n\to\infty)$，且不妨设当$n\geqslant N$时有$|\lambda_n-\lambda_0|<\frac{1}{2^N}(N=1, 2, \cdots)$，若不然可选取$\lambda_n$的某一子列满足要求。

由于$\lambda_n\in E$，对$\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$，存在点$x_n$满足：$|x_n-x_0|<\frac{1}{2^n}$，

且 $\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-\lambda_n\right|<\frac{1}{2^n}(n=1, 2, \cdots)$。

取上述点列$\{x_n\}$，显见$x_n\to x_0(n\to\infty)$。对于任给$\varepsilon>0$，存在N使得$\frac{1}{2^{N-1}}<\varepsilon$，当$n\geqslant N$时有

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-\lambda_0\right|\leqslant\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-\lambda_n\right|$$

$$+|\lambda_n-\lambda_0|<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^N}\leqslant\frac{1}{2^{N-1}}<\varepsilon.$$

这说明在x_0点对于点列$\{x_n\}$有导出数存在且

$$D_{\{x_n\}}f(x_0)\triangleq\lim_{x_n\to x_0}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lambda_0.$$

所以$\lambda_0\in E$。这就证明了E为闭集。

13. 试求作一函数$f(x)$，使之在某一点的导出数可取到$[-\infty, +\infty]$上的一切值。

解 作函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

则$f(x)$在$x=0$点的导出数可取到$[-\infty, +\infty]$上的一切值。因为

$$\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{h_n} & h_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\\ -\dfrac{1}{h_n} & h_n=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}\\ \dfrac{\sin\dfrac{\lambda}{2n\pi}}{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\lambda}{2n\pi}}} & h_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\lambda}{2n\pi}}\end{cases}$$

$$(-\infty<\lambda<+\infty)$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

所以，上式令$n\to\infty$，相应$\{h_n\}$的导出数：

$$D_{\{h_n\}}(f(0))=\begin{cases}+\infty\\ -\infty\\ \lambda\end{cases}$$

所以，$f(x)$在$x=0$点的一切导出数充满区间$[-\infty, +\infty]$。

14. 设$f(x)$，$g(x)$为$[a, b]$上函数，且$f(x)$关于$g(x)$的黎曼—司蒂吉斯积分存在．又设$x=x(t)$为$[\alpha,\beta]$上的严格单调的连续增函数，且$x(\alpha)=a$，$x(\beta)=b$，则在$[\alpha, \beta]$上$f(x(t))$关于$g(x(t))$的黎曼—司蒂吉斯积分存在，且

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))dg(x(t))=\int_a^b f(x)dg(x).$$

证　由于$\int_a^b f(x)dg(x)$存在，所以，对任给$\varepsilon>0$，存在λ，当分割T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$的最大子区间长度$\rho(T)<\lambda$（$\rho(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$）有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))-\int_a^b f(x)dg(x)\right|<\varepsilon \quad (*)$$

其中$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$　$(i=1,2,\cdots,n)$．

又由$x(t)$在$[\alpha, \beta]$上严格递增且连续，从而一致连续，所以，对上述λ，存在$\delta>0$，当$|t'-t''|<\delta$有

$$|x(t')-x(t'')|<\lambda$$

对$[\alpha, \beta]$作分法T^*：$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$，只要$\rho(T^*)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(t_i-t_{i-1})<\delta$，则对应于$[a, b]$的分法：$a=x(t_0)<x(t_1)<\cdots<x(t_m)=b$，有$0<x(t_i)-x(t_{i-1})<\lambda$以及对任意$\eta_i\in[t_{i-1}, t_i]$有$x(\eta_i)\in[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,m)$，此时满足$(*)$成立的条件，从而由$(*)$便有：

$$\left|\sum_{i=1}^m f(x(\eta_i))[g(x(t_i))-g(x(t_{i-1}))]\right.$$

$$-\int_a^b f(x)dg(x)\Big| < \varepsilon.$$

由于分法 T^* 和在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上取点 ξ_i 的任意性，上式说明 $f(x(t))$ 关于 $g(x(t))$ 的黎曼—司蒂吉斯积分存在，且

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))dg(x(t)) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

15. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上连续函数，且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$，又 $g_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界变差，且 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$，$\bigvee\limits_{-\infty}^{+\infty}(g_n) \leqslant k < +\infty$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)$. 又问条件 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$ 是否可除去.

证 对任意正数 A，B 有

$$\bigvee_{-A}^{B}(g_n) \leqslant \bigvee_{-\infty}^{+\infty}(g_n) \leqslant K$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$，由赫利定理的证明可知 $\bigvee\limits_{-A}^{B}(g) \leqslant K$，令 $A, B\to\infty$ 得到 $\bigvee\limits_{-\infty}^{\infty}(g) \leqslant K$，这表示 $g(x)$ 也为 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界变差函数.

又由 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$，对于任给 $\varepsilon>0$，存在 X，当 $|x|>X$ 有 $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{5K}$.

所以，当 A，$B>X$ 有

$$\left|\int_A^B f(x)dg_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5K}\bigvee_A^B(g_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$$

及 $\left|\int_{-A}^{-B} f(x)dg_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5} \quad (n=0,1,2,\cdots,g_0(x)\triangleq g(x))$

从而下述积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg_n(x) \quad 及 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)$$

都存在。

再由于赫利定理知：对 $A>X$，任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n\geqslant N$有

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)dg_n(x)-\int_{-A}^{A} f(x)dg(x)\right|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

这样，当$n\geqslant N$时有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg_n(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)\right| \\
\leqslant &\left|\int_{-\infty}^{-A} f(x)dg_n(x)\right|+\left|\int_{A}^{\infty} f(x)dg_n(x)\right| \\
&+\left|\int_{-\infty}^{-A} f(x)dg(x)\right|+\left|\int_{A}^{\infty} f(x)dg(x)\right| \\
&+\left|\int_{-A}^{A} f(x)dg_n(x)-\int_{-A}^{A} f(x)dg(x)\right|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x)$.

最后，若条件 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$去掉，结论不一定成立。

事实上，如取$f(x)\equiv C\neq 0$（C为常数），

$$g_n(x)=\begin{cases}0, & x<n,\\ 1, & x\geqslant n,\end{cases}$$

显然，$\bigvee\limits_{-\infty}^{\infty}(g_n)=1,\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=0$即$g(x)\equiv 0$,

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg_n(x) = C \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dg(x) = 0$$

这说明此时结论不成立。

16. 设$f(x)$为$[a, b]$上有限函数，对分法 T：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，记

$$\bigvee_f^2 (T) \triangleq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right|,$$

如果 $\sup_T \bigvee_f^2 (T) < +\infty$，则证明：

(1) $f(x)$在$[a, b]$上满足李普希兹条件；

(2) 对 任 意$x \in (a, b)$ 有 $D^+ f(x) = D_+ f(x)$， $D^- f(x) = D_- f(x)$。其中 $D^+ f(x)$，$D_+ f(x)$($D^- f(x)$，$D_- f(x)$)为$f(x)$在x点右(左)导出数的上、下确界；

(3) 若定义 $f'_+(x) \triangleq D^+ f(x)$，$f'_-(x) \triangleq D^- f(x)$，则$f'_+(x)$，$f'_-(x)$为$[a, b]$上的有界变差函数。

证 (1) 任取定点$x_0 \in (a, b)$，由于$f(x_0)$有限，所以

$$\alpha = \max\left(\left| \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \right|, \left| \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \right| \right) < +\infty.$$

任取$x \in [a, b]$，$x \neq x_0$，若$x_0 < x \leqslant b$，对以$a < x_0 < x \leqslant b$为分点的分法T，由假设有

$$\left| \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \bigvee_f^2 (T) \leqslant M.$$

其中 $M=\sup\limits_{T}\bigvee_f^2(T)<+\infty$，所以

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M+\left|\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\right|\leqslant M+a<+\infty,$$

同样，若$a\leqslant x<x_0<b$，类似有

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\right|\leqslant M+\left|\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\right|\leqslant M+a。$$

现任取x_1，$x_2\in[a,\ b]$，不妨设$x_1<x_2$。

若x_1，x_2中有一个等于x_0，由上可知：

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant M+a。$$

若x_1，x_2在x_0的同侧，即$x_1<x_2<x_0$或$x_0<x_1<x_2$，

总有 $$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_0)-f(x_2)}{x_0-x_2}\right|\leqslant M \quad 或$$

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant M。$$

所以 $$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant M+\max\left(\left|\frac{f(x_0)-f(x_2)}{x_0-x_2}\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right|\right)\leqslant 2M+a。$$

若x_1，x_2在x_0的异侧，即$x_1<x_0<x_2$，则有

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant\left|\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\cdot\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}\right|$$

$$+\left|\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\cdot\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}\right|\leqslant\left|\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\right|$$

$$+\left|\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\right|\leqslant 2(M+\alpha)$$

取$N=2(M+\alpha)$，综上所证对一切x_1，$x_2\in[a, b]$恒有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant N|x_2-x_1|$$

这就证明了$f(x)$满足李普希兹条件.

(2) (*i*) 由微积分知：若$\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i-1}|$有界，则序列$\{a_n\}$收敛. 事实上，由$a_n=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})+a_0$，右边部分和收敛，从而$\lim_{n\to\infty}a_n$存在.

(*ii*)证明$D^-f(x)=D_-f(x)$

由(1) $f(x)$满足李普希兹条件，因此$f(x)$的一切导出数都有界即$|Df(x)|\leqslant N$. 从而$D^-f(x)$，$D_-f(x)$有界. 又类似于第12题的证明可推知左导出数的全体是一个闭集，从而$D^-f(x)$及$D_-f(x)$为$f(x)$在x点的两个导出数，故存在$x_n\nearrow x^-$，$y_n\nearrow x^-$使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=D^-f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}=D_-f(x).$$

若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$中有无穷子列相等，显然有$D^-f(x)=D_-f(x)$，因此不妨设$\{x_n\}\cap\{y_n\}=\phi$.

由于$x_n\nearrow x$，$y_n\nearrow x$，故可选它们的子列满足：

1°. $x_{n_1}<x_{n_2}<y_{m_1}<y_{m_2}<\cdots<x_{n_k}<x_{n_{k+1}}$
$<y_{m_k}<y_{m_{k+1}}<\cdots$;

$$2^\circ.\ 0<\frac{x-x_{n_{k+1}}}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}<1,\quad 0<\frac{x-y_{m_{k+1}}}{y_{m_{k+1}}-y_{m_k}}<1.$$

读者不难验证这两个子列的存在性。

对子序列(1°)利用假设条件和(i)的结果易证：

$$\left\{\frac{f(x_{n_{k+1}})-f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}\right\}\text{及}\left\{\frac{f(y_{m_{k+1}})-f(y_{m_k})}{y_{m_{k+1}}-y_{m_k}}\right\}$$

均收敛，且它们有相同的极限．从而只要证：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_{k+1}})-f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}=D^-f(x),$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(y_{m_{k+1}})-f(y_{m_k})}{y_{m_{k+1}}-y_{m_k}}=D_-f(x).$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(x_{n_k})-f(x)}{x_{n_k}-x}=D^-f(x)$

以及 $\dfrac{f(x_{n_{k+1}})-f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}$

$$=\frac{f(x_{n_{k+1}})-f(x)}{x_{n_{k+1}}-x}\cdot\frac{x_{n_{k+1}}-x}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}$$

$$-\frac{f(x_{n_k})-f(x)}{x_{n_k}-x}\cdot\frac{x_{n_k}-x}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}},$$

所以 $\left|\dfrac{f(x_{n_{k+1}})-f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}-D^-f(x)\right|$

$$\leqslant\left|\frac{f(x_{n_{k+1}})-f(x)}{x_{n_{k+1}}-x}-D^{-}f(x)\right|\cdot\left|\frac{x_{n_{k+1}}-x}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}\right|$$

$$+\left|\frac{f(x_{n_k})-f(x)}{x_{n_k}-x}-D^{-}f(x)\right|$$

$$\times\left|\frac{x_{n_k}-x_{n_{k+1}}+x_{n_{k+1}}-x}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{f(x_{n_{k+1}})-f(x)}{x_{n_{k+1}}-x}-D^{-}f(x)\right|$$

$$+2\left|\frac{f(x_{n_k})-f(x)}{x_{n_k}-x}-D^{-}f(x)\right|\to 0\ (k\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(x_{n_{k+1}})-f(x_{n_k})}{x_{n_{k+1}}-x_{n_k}}=D^{-}f(x)$

同理可证：$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(y_{m_{k+1}})-f(y_{m_k})}{y_{m_{k+1}}-y_{m_k}}=D_{-}f(x)$。

所以 $D^{-}f(x)=D_{-}f(x)$

(iii)完全类似于(iii)可证明：$D^{+}f(x)=D_{+}f(x)$

(3) 证明$f'_{-}(x)$以及$f'_{+}(x)$为$[a,\ b]$上有界变差函数。

对任意分法T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，又设序列$\{x_{i-1}^{(m)}\}$：$x_{i-1}^{(m)}\nearrow x_i(m\to\infty)$，且不妨可设$x_{i-1}<x_{i-1}^{(m)}<x_i(i=1,\ 2,\cdots,n)$对一切$m$成立。由(2)的$(ii)$及$(iii)$可知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_{i-1}^{(m)})-f(x_i)}{x_{i-1}^{(m)}-x_i}=f'_{-}(x_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

于是 $\sum_{i=1}^{n-1}|f'_-(x_i)-f'_-(x_{i+1})|$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_{i-1}^{(m)})-f(x_i)}{x_{i-1}^{(m)}-x_i}-\lim_{m\to\infty}\frac{f(x_i^{(m)})-f(x_{i+1})}{x_i^{(m)}-x_{i+1}}\right|$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{f(x_{i-1}^{(m)})-f(x_i)}{x_{i-1}^{(m)}-x_i}-\frac{f(x_i^{(m)})-f(x_{i+1})}{x_i^{(m)}-x_{i+1}}\right|$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left|\frac{f(x_{i-1}^{(m)})-f(x_i)}{x_{i-1}^{(m)}-x_i}-\frac{f(x_i)-f(x_i^{(m)})}{x_i-x_i^{(m)}}\right|+\left|\frac{f(x_i)-f(x_i^{(m)})}{x_i-x_i^{(m)}}-\frac{f(x_i^{(m)})-f(x_{i+1})}{x_i^{(m)}-x_{i+1}}\right|\right)\quad(*)$$

对于任一固定m，考虑$[a, b]$的一分法$\widetilde{T}$：

$$a=x_0<x_0^{(m)}<x_1<x_1^{(m)}<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_{n-1}^{(m)}<x_n=b$$

$(m=1, 2, \cdots)$ 则对此分法$\widetilde{T}$我们有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left|\frac{f(x_{i-1}^{(m)})-f(x_i)}{x_{i-1}^{(m)}-x_i}-\frac{f(x_i)-f(x_i^{(m)})}{x_i-x_i^{(m)}}\right|+\left|\frac{f(x_i)-f(x_i^{(m)})}{x_i-x_i^{(m)}}-\frac{f(x_i^{(m)})-f(x_{i+1})}{x_i^{(m)}-x_{i+1}}\right|\right)$$

$$\leqslant V_f^2(\widetilde{T})\leqslant M$$

代入$(*)$对任意分法T有

$$\sum_{i=1}^{n-1}|f'_-(x_i)-f'_-(x_{i-1})|\leqslant M$$

这证明了$f'_-(x)$为(a, b)上有界变差函数。

同样可证$f'_+(x)$亦为(a, b)上有界变差函数。

17. 设$f(x)$为$[a, b]$上的连续函数，$\alpha(x)$为$[a, b]$上的单调增函数，则对于$[a, b]$上的任意固定分法T_0：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，由部分和构成的集$D(T_0, f, \alpha)=\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\alpha_i \middle| \xi_i\in[x_{i-1}, x_i], \Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right\}$是一个闭区间.

证 对分法T_0，令$M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$，

由于$f(x)$连续，故存在$\bar{\xi}_i$，$\underline{\xi}_i\in[x_{i-1}, x_i]$ 使得 $M_i=f(\bar{\xi}_i)$，$m_i=f(\underline{\xi}_i)$ $(i=1,2,\cdots, n)$。又由$\alpha(x)$为单调增函数，对任意$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$$(i=1, 2, \cdots, n)$有

$$f(\underline{\xi}_i)\Delta\alpha_i\leqslant f(\xi_i)\Delta\alpha_i\leqslant f(\bar{\xi}_i)\Delta\alpha_i,$$

作和式，记

$$C\triangleq\sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta\alpha_i\leqslant\sigma(T_0,\xi;f,\alpha\triangleq\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\alpha_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i)\Delta\alpha_i\triangleq d$$

显见 $D(T_0, f, \alpha)\subset[c, d]$，且$c, d\in D(T_0, f, \alpha)$

下面只要证$[c, d]\subset D(T_0, f, \alpha)$。

对任意$\lambda\in[0, 1]$，定义

$$F(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} f((1-\lambda)\underline{\xi}_i+\lambda\bar{\xi}_i)\Delta\alpha_i$$

对于这个λ总有$x_{i-1}\leqslant(1-\lambda)\underline{\xi}_i+\lambda\bar{\xi}_i\leqslant x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$因此$F(\lambda)\in D(T_0, f, \alpha)$。

此外，由于$f((1-\lambda)\underline{\xi_i}+\lambda\overline{\xi_i})$为[0，1]上$\lambda$的连续函数，从而$F(\lambda)$为[0，1]上连续函数，且$F(0)=c$，$F(1)=d$，故由连续函数的性质知$F(\lambda)$取到$[c, d]$上一切值，从而有

$$[c, d]\subset D(T_0, f, \alpha)$$

综上便得 $D(T_0, f, \alpha)=[c, d]$。

［注］为了考虑下面的问题，我们先补充一个概念。

设$f(x)$，$\alpha(x)$为$[a, b]$上有界函数，且$\alpha(x)$为单调增函数，对于$[a, b]$的任一分法T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，

记$M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)(i=1, 2, \cdots, n)$，

分别作达布上和与下和：

$$U(T, f, \alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i,\quad L(T, f, \alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i$$

其中$\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})(i=1, 2, \cdots, n)$。又定义上、下积分

$$\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)=\inf_T U(T, f, \alpha)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)=\sup_T L(T, f, \alpha).$$

显见，由上、下确界的定义，对有界函数$f(x)$及有界单调函数$\alpha(x)$，这两个积分都存在。如果上述两个积分值相等，则称$f(x)$关于$\alpha(x)$在达布意义下的黎曼—司蒂吉斯积分存在或$f(x)$关于$\alpha(x)$在达布意义下可积，记其积分值为

$$(D)\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)=\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x).$$

18. 设$\alpha(x)$为单调函数，$f(x)$在$[a, b]$上关于$\alpha(x)$的黎曼—司蒂吉斯积分存在，则$f(x)$关于$\alpha(x)$在达布意义下的黎曼—司蒂吉斯积分也存在，并且这两种意义下的积分相等。又问此定理之逆是否成立，举例说明。

证 设$\sigma(T, \xi; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\alpha_i$为相应于分法$T$和取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$的部分和式，记$\rho(T) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1})$，由假设我们有

$$\lim_{\rho(T) \to 0} \sigma(T, \xi_i; f, \alpha) = \int_a^b f(x)d\alpha(x) \triangleq A.$$

也就是说：任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$\rho(T) < \delta$时有

$$|\sigma(T, \xi; f, \alpha) - A| < \varepsilon/2$$

不难验证，对上述ε和分法T，分别取达布上和与下和有

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(T, f, \alpha) \leqslant U(T, f, \alpha) \leqslant A + \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

另一方面，可以证明：

$$L(T, f, \alpha) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$$

$$\leqslant U(T, f, \alpha) \quad (2)$$

事实上，先证对于任意分法T_1，T_2，令$T = T_1 \cup T_2$，则有

$$L(T_1, f, \alpha) \leqslant L(T, f, \alpha) \leqslant U(T, f, \alpha) \leqslant U(T_2, f, \alpha) \quad (3)$$

现证(3)式，因为T是T_1的加细分法。若T只是在T_1的第j个小区间上多增一个点x_j^*即$x_{j-1} < x_j^* < x_j$，记

$m_j^{(1)} = \inf\limits_{x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j^*} \{f(x)\}$，$m_j^{(2)} = \inf\limits_{x_j^* \leqslant x \leqslant x_j} \{f(x)\}$，所以，

$m_j = \inf\limits_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} \{f(x)\} \leqslant \min(m_j^{(1)}, m_j^{(2)})$。又利用$\alpha(x)$的递增性质可得：

$$L(T, f, \alpha) - L(T_1, f, \alpha) = m_j^{(1)}[\alpha(x_j^*) - \alpha(x_{j-1})]$$
$$+ m_j^{(2)}[\alpha(x_j) - \alpha(x_j^*)] - m[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] \geqslant 0$$

若T比T_1多更多的分点，重复利用上述推理可证

$$L(T, f, \alpha) - L(T_1, f, \alpha) \geqslant 0.$$

同理可证 $U(T_2, f, \alpha) - U(T, f, \alpha) \geqslant 0$。

又 $U(T, f, \alpha) - L(T, f, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \geqslant 0$

综上可见(3)式成立。

由(3)可知，对于任意分法T_1，T_2有

$$L(T_1, f, \alpha) \leqslant U(T_2, f, \alpha) \tag{4}$$

其次证(2)式成立：

在(4)中固定T_2，对T_1取上确界得

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) = \sup_{T_1} L(T_1, f, \alpha) \leqslant U(T_2, f, \alpha)$$

同样在(4)中固定T_1，对T_2取下确界得

$$L(T_1, f, \alpha) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x)$$

将此式再对T_1取上确界得

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x)$$

综上得不等式(2)。利用不等式(1)、(2)得

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leqslant A + \frac{\varepsilon}{2}$$

所以 $0\leqslant\overline{\int_a^b}f(x)d\alpha(x)-\underline{\int_a^b}f(x)d\alpha(x)$

$$\leqslant\left|\underline{\int_a^b}f(x)d\alpha(x)-A\right|+\left|\overline{\int_a^b}f(x)d\alpha(x)-A\right|\leqslant\varepsilon$$

由于ε的任意性，这就证明了：

$$\underline{\int_a^b}f(x)d\alpha(x)=\overline{\int_a^b}f(x)d\alpha(x).$$

反之，这个定理的逆不成立．举一反例说明．

设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2 & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1;\end{cases}$

$$\alpha(x)=\begin{cases}3 & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ 4 & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

对任意$\delta>0$,取分法T_1：$0=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0}=\dfrac{1}{2}<\cdots<x_n=1$，$\rho(T_1)<\delta$以及分法$T_2$：$0=y_0<y_1<\cdots<y_m=1$，$\dfrac{1}{2}\in(y_{j_0-1},\ y_{j_0})$，$\rho(T_2)<\delta$，则

$$\sigma(T_1,\ \xi;\ f,\ \alpha)=f(\xi_{i_0})(\alpha(x_{i_0})-\alpha(x_{i_0-1}))$$
$$+f(\xi_{i_0+1})(\alpha(x_{i_0+1})-\alpha(x_{i_0}))=1,$$
$$\sigma(T_2,\ \xi;\ f,\ \alpha)=f(\xi_{j_0})[d(y_{j_0})-\alpha(y_{j_0-1})]$$

$$=\begin{cases}1 & \xi_{j_0}\in\left[y_{j_0-1},\ \frac{1}{2}\right]\\ 2 & \xi_{j_0}\in\left(\frac{1}{2},\ y_{j_0}\right)\end{cases}$$

从而 $\lim\limits_{\rho(T)\to 0}\sigma(T_1,\ \xi;\ f,\ \alpha)$不存在，也就是$f(x)$关于$\alpha(x)$不可积.

但另一方面，对任意分法T，易知

$\sup\limits_T L(T,\ f,\ \alpha)=1$，$\inf\limits_T U(T,\ f,\ \alpha)=1$

因此 $\underline{\int_0^1} f(x)d\alpha(x)=\overline{\int_0^1} f(x)d\alpha(x)=1$，这说明在达布意义下的黎曼—司蒂吉斯积分是存在的.

注1.关于这两种意义下的积分读者不难补证如下命题.

$f(x)$为$[a,\ b]$上仅在$x=C$点不连续的函数，$\alpha(x)$为$[a,\ b]$上单调增函数，且在$x=C$点不连续，则$f(x)$关于$\alpha(x)$的黎曼—司蒂吉斯积分不存在. 但若$f(x)$在$x=C$点右(左)连续，$\alpha(x)$在$x=C$点左(右)连续，则$f(x)$关于$\alpha(x)$在达布意义下的黎曼—司蒂吉斯积分存在. 而$f(x)$，$\alpha(x)$若在$x=C$点的某一同侧均不连续，则$f(x)$关于$\alpha(x)$在达布意义下的积分也不存在.

注2.有时采用上、下积分相等来定义黎曼—司蒂吉斯积分存在.根据18题可知这样定义比书中的定义适用范围更广泛.为了更好理解这两种定义的差别，我们引入下述命题.

19. 设$f(x)$为$[a,b]$上有界函数，$\alpha(x)$为$[a,b]$上有界单调函数，下面三个命题等价：

（1）存在实常数A满足如下性质：对任给$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$的一个分法T_ε，使得对于T_ε的任意加细分法T，对应的部分和$\sigma(T, \xi; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\alpha_i(\xi_i\in[x_{i-1}, x_i])$满足

$$|\sigma(T, \xi; f, \alpha) - A| < \varepsilon.$$

（2）对任给$\varepsilon>0$，存在一个分法T_ε使得对于T_ε的任一加细分法T有

$$0 \leqslant U(T, f, \alpha) - L(T, f, \alpha) < \varepsilon.$$

（3）$f(x)$关于$\alpha(x)$的达布上、下积分相等，也就是说在达布意义下的积分存在。

证　(1)$\Longrightarrow$(2)：若$\alpha(a)=\alpha(b)$，结果显然成立。

若$\alpha(a)<\alpha(b)$，对任给$\varepsilon>0$，由(1)知存在分法T_ε对T_ε的任一加细分法T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$及任意$\xi_i, \xi_i'\in[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta\alpha_i - A\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\,\Delta\alpha_i - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

合并这两个不等式有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\xi_i'))\,\Delta d_i\right| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

因为 $M_i - m_i = \sup\limits_{x, x'\in[x_{i-1}, x_i]} \{f(x) - f(x')\}$，所以，若取$h = \dfrac{\varepsilon}{3(\alpha(b)-\alpha(a))}$可找到$\xi_i$，$\xi_i'\in[x_{i-1}, x_i]$使得

$$f(\xi_i) - f(\xi_i') > M_i - m_i - h$$

这样对于分法T_ε的任一加细分法T有

$$0 \leqslant U(T, f, \alpha) - L(T, f, \alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta \alpha_i$$

$$\leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\xi_i')) \Delta \alpha_i \right| + h \sum_{i=1}^{n} \Delta \alpha_i$$

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

这就证明了(2)。

(2)$\Longrightarrow$(3)：由(2)可知，对任给$\varepsilon > 0$，存在分法T_ε，使得对于T_ε的任一加细分法T有

$$U(T, f, \alpha) < \varepsilon + L(T, f, \alpha)$$

由上题(2)式可知：

$$\overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leqslant U(T, f, \alpha) < \varepsilon + L(T, f, \alpha)$$

$$\leqslant \varepsilon + \underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x)$$

以及

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x).$$

在前式中，由于ε的任意性，令$\varepsilon \to 0$有

$$\overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x)$$

所以

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) = \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) = (D) \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

(3)$\Longrightarrow$(1)：由(3)记

$$A=\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)=\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x).$$

从而，对任给$\varepsilon>0$，存在分法T_ε'、T_ε''使得：

$$U(T_\varepsilon',f,\alpha)<A+\varepsilon,\ L(T_\varepsilon'',f,\alpha)>A-\varepsilon.$$

从而对T_ε'的任意加细分法T有

$$U(T,f,\alpha)\leqslant U(T_\varepsilon',f,\alpha)<A+\varepsilon.$$

对T_ε''的任意加细分法T有

$$L(T,f,\alpha)\geqslant L(T_\varepsilon'',f,\alpha)>A-\varepsilon.$$

取$T_\varepsilon=T_\varepsilon'\cup T_\varepsilon''$，则对$T_\varepsilon$的任意加细分法$T$有

$$A-\varepsilon<L(T_\varepsilon,f,\alpha)\leqslant L(T,f,\alpha)\leqslant\sigma(T,\xi;f,\alpha)$$

$$\leqslant U(T,f,\alpha)\leqslant U(T_\varepsilon,f,\alpha)\leqslant A+\varepsilon.$$

所以 $|\sigma(T,\xi;f,\alpha)-A|<\varepsilon$. 这就证明了(1)。

20. 设$f(x)$在$[a,b]$上关于有界变差函数$\alpha(x)$的全变差函数$\pi(x)\triangleq\bigvee_a^x(\alpha)$的黎曼—司蒂吉斯积分存在，则$f(x)$关于$\alpha(x)$的黎曼—司蒂吉斯积分存在，且满足

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|d\bigvee_a^x(\alpha).$$

证 由于$\int_a^b f(x)d\bigvee_a^x(\alpha)$存在，由第18题可知，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对分法$T$，只要$\rho(T)<\delta$有

$$0\leqslant U(T,f,\alpha)-L(T,f,\alpha)\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta\pi_i<\frac{\varepsilon}{4}.$$

其中 $\Delta\pi_i=\pi(x_i)-\pi(x_{i-1})$，$\omega_i$为$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅．任取分法$T_1$：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$及$T_2$使得$\rho(T_1)<\delta,\rho(T_2)<\delta$。作 $T=T_1\cup T_2$：$a=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$，其中 $x'_{k_i}=x_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$，从而

$$|\sigma(T,\xi';f,\alpha)-\sigma(T_1,\xi;f,\alpha)|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}f(\xi_j')\,\Delta\alpha_j-f(\xi_i)\,\Delta\alpha_j\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}|f(\xi_j')-f(\xi_i)|\,|\alpha(x_j')-\alpha(x'_{j-1})|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}|\alpha(x_j')-\alpha(x'_{j-1})|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(\alpha)<\frac{\varepsilon}{4}$$

同理对T_2及$T=T_1\cup T_2$也有

$$|\sigma(T,\xi';f,\alpha)-\sigma(T_2,\tilde{\xi};f,\alpha)|<\frac{\varepsilon}{4}$$

合并此二式,对任意分法T_1，T_2，只要$\rho(T_1)<\delta$，$\rho(T_2)<\delta$及任意取点ξ，$\tilde{\xi}$，就有

$$|\sigma(T_1,\xi;f,\alpha)-\sigma(T_2,\tilde{\xi};f,\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(*)$$

由此可知，对$\varepsilon_m=\dfrac{1}{2^m}$，存在$\delta_m>0$，取$[a,b]$的$2^{n_m}$等分，使$(b-a)/2^{n_m}<\delta_m$，不妨可设$n_m<n_{m+1}$，对此分法取如第5题

(iii)中的特定部分和$\overline{\sigma_m}=\sum_{i=1}^{2^{n_m}} f(x_i)\Delta\alpha_i \quad (m=1,2,\cdots)$。

由(*)可知：$|\bar{\sigma}_{m+1}-\bar{\sigma}_m|<\frac{1}{2^m}$(因此时相应两个等分法的子区间长$<\delta_m$)。所以

$$|\bar{\sigma}_{m+p}-\bar{\sigma}_m|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|\bar{\sigma}_{m+i}-\bar{\sigma}_{m+i-1}|$$

$$<\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2^{m+i-1}}<\frac{1}{2^{m-1}}.$$

这说明数列$\{\bar{\sigma}_m\}$为柯西基本列。因此，存在极限A即

$$\lim_{m\to\infty}\bar{\sigma}_m=A. \qquad (\ddagger)$$

下面证明：对于任意分法T和取点ξ，恒有

$$\lim_{\rho(T)\to 0}\sigma(T,\xi;f,\alpha)=A$$

从而就证明了$f(x)$关于$\alpha(x)$的黎曼—司蒂吉斯积分存在。

由公式($\ddagger$)，对任给$\varepsilon>0$，存在N，当$m\geqslant N$有

$$|\bar{\sigma}_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记$\delta_1=(b-a)/2^{n_N}$(其中n_N如上所取)，不妨取N充分大使得$\delta_1<\delta$(这里的δ为满足(*)所取)，这样由(*)式可得：对任给分法T，只要$\rho(T)<\delta$及取$m\geqslant N$，就有：

$$|\sigma(T,\xi;f,\alpha)-A|\leqslant|\sigma(T,\xi;f,\alpha)-\bar{\sigma}_m|$$

$$+|\bar{\sigma}_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这证明了 $\lim\limits_{\rho(T)\to 0}\sigma(T,\xi;f,\alpha)=A$.

最后证不等式：

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|d\bigvee_a^x(\alpha).$$

若 $\int_a^b |f(x)|d\bigvee_a^x(\alpha) = +\infty$，则不等式成立。

若 $\int_a^b |f(x)|d\bigvee_a^x(\alpha) < +\infty$，则

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| = \lim_{\rho(T)\to 0}\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))\right|$$

$$\leqslant \lim_{\rho(T)\to 0}\sum_{i=1}^m |f(\xi_i)|\cdot|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|$$

$$\leqslant \lim_{\rho(T)\to 0}\sum_{i=1}^m |f(\xi_i)|\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(\alpha)$$

$$= \int_a^b |f(x)|d\bigvee_a^x(\alpha).$$

21. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\alpha(x)$为$[a,b]$上有界变差函数，记$\pi(x)=\bigvee_a^x(\alpha)$，$F(x)=\int_a^x f(t)d\alpha(t)$。证明：$F(x)$为$[a,b]$上有界变差函数且 $\bigvee_a^b(F)=\int_a^b|f(t)|d\pi(t)$。

证 由第20题知

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i)-F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,d\alpha(t)\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|\,d\pi(t) = \int_a^b|f(t)|d\pi(t).$$

所以，$F(x)$为有界变差函数，且

$$\bigvee_a^b(F)=\sup_T\sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})|\leqslant\int_a^b|f(t)|d\pi(t).$$

记 $J=\int_a^b|f(t)|d\pi(t)$，对于任一分法T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$\rho(T)=\delta$。又记 $S_\delta=\sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)d\alpha(t)\right|$。

下面证明只要δ充分小，S_δ可任意接近J。

由于 $\pi(x)=\bigvee_a^x(\alpha)$，$\pi(a)=0$以及$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以，对任给$\varepsilon>0$，选$\delta_0>0$，取分法$T$使得$\rho(T)=\delta<\delta_0$ 满足

$$0\leqslant\pi(b)-\sum_{i=1}^n|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|<\varepsilon \quad 以及$$

$$|f(t')-f(t'')|<\varepsilon.$$

其中$|t'-t''|<\delta_0$，$a\leqslant t'<t''\leqslant b$。

另一方面，由于$|f(t)|$在$[x_{i-1},x_i]$上连续，$\pi(t)$为单调增函数，类似于积分中值定理，对$[x_{i-1},x_i]$存在$S_i\in[x_{i-1},x_i]$使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|d\pi(t)=|f(S_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_i}d\pi(t).$$

由此有 $J=\int_a^b|f(t)|d\pi(t)=\sum_{i=1}^n|f(S_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_i}d\pi(t)$

所以 $J-S_\delta=\sum_{i=1}^n|f(S_i)|\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i}d\pi(t)-\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}d\alpha(t)\right|\right\}$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(S_i)d\alpha(t)\right|-\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,d\alpha(t)\right|\right\}
$$

$$
\leqslant \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\cdot\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\pi(t)-\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\alpha(t)\right|\right]\right\}
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(S_i)-f(t))d\alpha(t)\right|
$$

$$
\leqslant \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\left\{\pi(b)-\sum_{i=1}^{n}|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|\right\}
$$

$$
+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|
$$

$$
\leqslant(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|+\pi(b))\cdot\varepsilon
$$

在此式中令 $\varepsilon\to 0$，有 $\delta\to 0$，而 $\lim\limits_{\delta\to 0} S_\delta=\bigvee_a^b(F)$，所以 $J\leqslant \lim\limits_{\delta\to 0} S_\delta=\bigvee_a^b(F)$。

所以 $\bigvee_a^b(F)=\int_a^b|f(t)|d\pi(t)$。

第八章　绝对连续函数、勒贝格不定积分

本章内容　绝对连续函数概念及基本性质．绝对连续函数与其导函数的关系，绝对连续函数与有界变差函数间的关系（巴拿哈・查列茨基定理，及菲赫金哥尔茨定理）．绝对连续函数与能表成可和函数不定积分的函数之间关系，进一步给出黎斯定理．近似连续概念及若当阿定理．最后研究了绝对连续函数与司蒂尔吉斯积分的联系和求原函数的问题．

1．可和函数在它的每一个勒贝格点是近似连续的，但其逆不真．

证　设$f(x)\in L[a,b]$，$x_0\in[a,b]$是它的勒贝格点．不妨设$x_0\in(a,b)$，因为对于端点只需考虑单侧情形就可以了．

由勒贝格点定义可知：对任给定的数列$\left\{\frac{1}{n\cdot 2^n},\ n=1,2,3,\cdots\right\}$必有相应的数列$\{h_n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$，$b-x_0>h_n>h_{n+1}>\cdots$，$h_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$．且当$h\in(0,\ h_n)$时，

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx<\frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

令　$\Delta_n=[x_0,\ x_0+h_n]$，

$$E_n = \Delta_n \cap E\left(|f(x)-f(x_0)| \geqslant \frac{1}{n}\right),$$

$$D = [x_0, b) - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

现证明$f(x)$沿D在x_0点右连续.

事实上，对任给定的$\varepsilon>0$，必存在n_0，$n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 当$x\in D\cap[x_0, x_0+h_{n_0}]$，有$x\overline{\in}E_{n_0}$从而

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{n_0}<\varepsilon,$$

因此，$f(x)$沿D在x_0点右连续. 用同样方法可证在x_0点沿

$$D' = [a, x_0] - \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_0-h_n, x_0] \cap$$

$$\cap E\left(|f(x)-f(x_0)|>\frac{1}{n}\right)$$

左连续. 所以，x_0是$f(x)$沿$D\cup D'$的连续点.

其次，要证明x_0是D的右全密点.

对任给的$h>0$，(不妨设$h<h_1$). 必有正整数n存在，使得$h_{n+1}<h\leqslant h_n$. 令

$$\begin{aligned}D(h) &= D\cap[x_0, x_0+h]\\ &= [x_0, x_0+h] - [x_0, x_0+h] \cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\\ &= [x_0, x_0+h] - \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i - \\ &\quad - [x_0, x_0+h] \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\end{aligned}$$

由于$h<h_n$，故对一切$k\leqslant n$有：

$$\frac{1}{n\cdot 2^n}>\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$\geqslant\frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]\cap E_k}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$\geqslant\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{k}m([x_0,x_0+h]\cap E_k)$$

$$\geqslant\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{n}m([x_0,x_0+h]\cap E_k).$$

所以，$m([x_0,x_0+h]\cap E_k)<\frac{h}{2^n}$，$(k\leqslant n)$

$$\sum_{k=1}^{n}m([x_0,x_0+h]\cap E_k)<\frac{n}{2^n}h.$$

当$k>n$时，完全类似的方法可知：

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}>\frac{1}{h_{n+1}}\int_{x_0}^{x_0+h_{n+1}}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$\geqslant\frac{1}{h_{n+1}}\int_{E_{n+1}}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$\geqslant\frac{1}{h_{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}m(E_{n+1})$$

所以　$m(E_{n+1})\leqslant\frac{h_{n+1}}{2^{n+1}}<\frac{h}{2^{n+1}}.$

同理　$m(E_{n+k})\leqslant\frac{h_{n+k}}{2^{n+k}}<\frac{h}{2^{n+k}}$　　$k=2,3,\cdots$

于是　$h>mD(h)>h-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h}{2^{n+k}}-\frac{nh}{2^n}$

$$1>\frac{mD(h)}{h}>1-\frac{n}{2^n}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+k}}=1-\frac{n+1}{2^n}.$$

而当$h\to 0^+$时，显然$n\to\infty$，所以

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{mD(h)}{h}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{2^n}\right)$$

$$=1$$

所以 x_0是D的右全密点，同法可证x_0是D'的左全密点。故x_0点是近似连续的点。从而命题得证。

反例：在[0，1)作如下函数：

$$f(x)=\begin{cases}2^n & x\in\left[\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^n}+d_n\right) \quad n=1,2,3,\cdots\\ 0 & x\in\left[\frac{1}{2^n}+d_n,\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad n=1,2,3,4,\cdots\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

其中 $d_n=\frac{1}{2^{2n}}$.

再将$f(x)$按偶函数延拓至$(-1,0]$而得到$(-1，1)$中定义的函数。

首先，证明$x=0$是右近似连续点。

令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+d_n,\ \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

当$x\in E$时，$f(x)=0$，而$f(0)=0$。故

$$\lim_{\substack{x\in E\\ x\to 0}}f(x)=f(0).$$

只要证明 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{E\cap(0,\ h)}{h}=1$。$x=0$就是右近似连续点了。

由$f(x)$定义，当$h\in\left(\dfrac{1}{2^{n_0+1}},\dfrac{1}{2^{n_0}}\right]$时，可令$E(h)=[0,h)\cap E$。

于是就有：

$$E(h)=\bigcup_{i=n_0+2}^{\infty}\left[\frac{1}{2^i}+d_i,\ \frac{1}{2^{i-1}}\right)\cup$$

$$\cup\left([0,\ h)\cap\left[\frac{1}{2^{n_0+1}}+d_{n_0+1},\frac{1}{2^{n_0}}\right)\right)$$

$$=[0,\ h)-\bigcup_{i=n_0+2}^{\infty}\left[\frac{1}{2^i},\ \frac{1}{2^i}+d_i\right)-$$

$$-[0,\ h)\cap\left[\frac{1}{2^{n_0+1}},\ \frac{1}{2^{n_0+1}}+d_{n_0+1}\right)。$$

由此可知：$mE(h)\geqslant h-\sum\limits_{i=n_0+2}^{\infty}d_i-d_{n_0+1}$

$$=h-\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}$$

$$\geqslant h-h\cdot\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

$$=h\left(1-\frac{1}{2^{n_0}}\right)。$$

对一切$\dfrac{1}{2^{n_0+1}}<h\leqslant\dfrac{1}{2^{n_0}}$，$n_0=1，2,\cdots$。都有上述不等式成立；

故当$h\to 0^+$时，有$n_0\to\infty$于是

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{mE(h)}{h}\geqslant 1-\lim_{n_0\to\infty}\frac{1}{2^{n_0}}=1$$

而　$mE(h)\leqslant 1$，

所以　$\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{mE(h)}{h}=1$

从而证明了$x=0$是右近似连续点。

完全同样的办法可证$x=0$是左近似连续点．故$x=0$是$f(x)$的近似连续点。

其次，证明$x=0$不是 $f(x)$ 的勒贝格点．事实上，只要取 $h_n=\frac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n}|f(x)-f(0)|dx$$

$$\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\sum_{i=n+1}^{\infty}2^i\cdot m\left[\frac{1}{2^i},\ \frac{1}{2^i}+d_i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{1}\cdot\frac{1}{2^n}=1>0$$

所以，$x=0$，不是$f(x)$的勒贝格点。

2．对于有界可测函数而言，勒贝格点与近似连续点一致。

证　因为勒贝格点必为近似连续点，所以只要证出有界可测函数的近似连续点也是勒贝格点即可。

设x_0是$f(x)$的近似连续点，所以存在集合E满足：

$$\lim_{\substack{x\in E\\ x\to x_0}} f(x)=f(x_0),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{m(E\cap[x_0-h,\ x_0+h])}{2h}=1$$

现估计下式：

$$\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{[x_0-h,\ x_0+h]\cap E}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$+\frac{1}{2h}\int_{[x_0-h,\ x_0+h]\cap \overline{E}}|f(x)-f(x_0)|dx。$$

由（*）知：对任给的 $\varepsilon>0$，存在$h_0>0$，当 $0<h<h_0$ 时，若$x\in E$，$|x-x_0|<h$，则有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

及 $$\frac{m([x_0-h,\ x_0+h]-E)}{2h}<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,\ b]}|f(x)|<+\infty$ （因$f(x)$有界）。

将这两个结论代入（**），于是当 $0<h<h_0$时，就有：

$$0\leqslant\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{m(E\cap[x_0-h,\ x_0+h])}{2h}$$

$$+\frac{2M}{2h}\cdot m([x_0-h,\ x_0+h]-E)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{4M}\cdot\varepsilon=\varepsilon.$$

于是 $$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|dx=0$$

从而可知：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{x+h}|f(x)-f(x_0)|dx = 0$$ ，x_0 是 $f(x)$ 的勒贝格点。

3．设在点x_0，$f(x)$是其不定积分的导数，单是在此假定下，函数$f(x)$在x_0点未必近似连续。

证 设

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x\in\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n(n+1)},\ \frac{1}{n}\right), \\ 1 & x\in\left[\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n(n+1)}\right), \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

$f(x)$ 是 $[0,1)$ 上有界可测函数，故$f(x)\in L[0,1)$。

令 $\varphi(x)=\int_0^x f(x)dx$

首先计算$\varphi(x)$在$x=0$点的右导数。

$$\varphi'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^h f(x)\,dx}{h}.$$

设$0<h<1$,必有正整数n_0存在，使得

$$\frac{1}{n_0+1}<h\leqslant\frac{1}{n_0}，于是$$

$$\int_0^h f(x)dx=\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{n_0+1}}^{h}f(x)dx$$

由$f(x)$的定义知：$\int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}}f(x)dx=0,(i=1,2,3,\cdots)$

所以

$$\left|\int_0^h f(x)dx\right| = \left|\int_{\frac{1}{n_0+1}}^h f(x)dx\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}$$

$$= \frac{1}{n_0 \cdot (n_0+1)}.$$

当$h\to 0^+$时$n_0\to +\infty$，于是有：

$$0 \leqslant \lim_{h\to 0^+} \frac{|\varphi(h)|}{h} \leqslant \lim_{n_0\to\infty} \frac{n_0+1}{n_0\cdot(n_0+1)} = 0$$

所以$\varphi(x)$在$x=0$的右导数存在且等于$f(0)$。

当把$f(x)$按偶函数延拓至$(-1,0]$时，就得到$(-1,+1)$中定义的函数。用上述同样方法可知$\varphi(x)$在$x=0$的左导数存在，且$\varphi'(0^-)=f(0)$。于是$\varphi'(0)=f(0)=0$。

由于在0点的任意邻域$(0,\pm\delta)$，当$x\in(0,\pm\delta)$时，恒有$|f(x)|=1$，从而对$x=0$的任一全密点集不可能有点列x_n，当$x_n\to 0$时$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0=f(0)$。故$x=0$点一定不是$f(x)$的近似连续点。

4. 假如$f(x)$的所有导出数都满足不等式$|Df(x)|\leqslant K$，那末$f(x)$满足李普西兹条件。

证 先证$f(x)$是连续函数。

若$f(x)$不是连续函数，必有点x_0是不连续点。于是，对某个$\varepsilon_0>0$，存在一串数列$\{\delta_n\}\downarrow 0$，使得$|f(x_0+\delta_n)-f(x_0)|>\varepsilon_0$。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(x_0+\delta_n)-f(x_0)|}{\delta_n}=+\infty$$

即$f(x)$在x_0点有一导出数是$+\infty$。这就与题设$f(x)$所有导出数都满足$|Df(x)|\leqslant K$相矛盾．所以必有$f(x)$是连续函数。

现构造新的函数

$$F_1(x)=Kx+f(x)$$

$$F_2(x)=Kx-f(x)$$

$$DF_1(x)=K+Df(x)\geqslant 0$$

$$DF_2(x)=K-Df(x)\geqslant 0$$

由定理“若$\varphi(x)$是$[a,b]$上定义的有限函数，它在每一点的一切导出数都不是负数，则$\varphi(x)$是一增加函数。”可知：当$y>x$时有

$$F_1(y)\geqslant F_1(x);$$

$$F_2(y)\geqslant F_2(x).$$

也可写成：

$$Ky+f(y)\geqslant Kx+f(x),$$

$$Ky-f(y)\geqslant Kx-f(x).$$

从而就有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant K|y-x|.$$

这就证明了$f(x)$是满足李普西兹条件。

5．设$F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上定义的函数，如果对于$(-\infty,+\infty)$上任何绝对连续函数$f(x)$，$F(f(x))$是绝对连续的，则$F(x)$满足李普西兹条件。

证　由于$F(x)$是绝对连续的，因而$F(x)$几乎处处有有限导

数。

若$F(x)$不满足李普西兹条件，由前题可知，$F'(x)$一定不是有界的。因此，有一列$\{x_n\}$使得$|F'(x_n)|>n$；$(n=1,2,3,\cdots)$。在$\{x_n\}$中可选出一列$\{x_{n_k}\}$满足$x_{n_k}<x_{n_{k+1}}$，$(k=1,2,\cdots)$且$F'(x_{n_k})$同号，不妨设$F'(x_{n_k})>0$。

从而$F'(x_{n_k})>n_k$。$(k=1,2,3,\cdots.)$

令　$y_k=x_{n_k}$，由于$F'(y_k)>n_k\geqslant k$，所以，存在$\delta_k^0>0$，当$|\delta|<\delta_k^0$时

$$\frac{F(y_k+\delta)-F(y_k)}{\delta}>k$$

现取δ_k满足下列要求：$0<\delta_k<\delta_k^0$，$\delta_k<\frac{1}{k^2}$，$y_k+\delta_k<y_{k+1}$。于是

$$|F(y_k+\delta_k)-F(y_k)|>k\delta_k \qquad (*)$$

其中$\sum_{k=1}^{\infty}k\delta_k<+\infty$。若不然，即$\sum_{k=1}^{\infty}k\delta_k=+\infty$。从而，对一切正整数$m$，都有

$$\sum_{k=m}^{\infty}|F(y_k+\delta_k)-F(y_k)|>\sum_{k=m}^{\infty}k\delta_k=+\infty. \qquad (**)$$

另一方面，由$0<\delta_k<\frac{1}{k^2}$，有$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty$。于是对任给的$\delta>0$，存在正整数$m(\delta)$，使得当$m_0\geqslant m(\delta)$时，有

$$\sum_{k=m_0}^{\infty}\delta_k\leqslant\sum_{k=m_0}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\delta.$$

而$F(y)$为绝对连续函数，对任给的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta$，$\{(a_k,b_k)\}$为两两不相交的区间组时，有

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} |F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon;$$

所以如取$(a_k,b_k)=(y_k,y_k+\delta_k)$，有

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} |F(y_k+\delta_k)-F(y_k)|<\varepsilon. \tag{***}$$

(**)(***)二式是相矛盾的，所以必有：

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k<+\infty. \tag{1}$$

利用上面得到的$y_k,\delta_k(k=1,2,3,\cdots)$构造出一个分段线性的连续函数．由于$\delta_k<\frac{1}{k^2}$,所以必有正整数$c_k(>2)$满足：

$$c_k\delta_k>\frac{1}{k^2}>(c_k-1)\delta_k. \tag{2}$$

设 $f(x)=y_1 \quad x\leqslant 0.$

$$f(x)=\begin{cases} [x-n(\delta_1+1)]+y_1, x\in[n(\delta_1+1),(n+1)\delta_1+n], \\ \qquad (n=0,1,2,3,\cdots(c_1-1)); \\ -\delta_1[x-(n+1)\delta_1-n]+y_1+\delta_1, x\in[(n+1)\delta_1+n, \\ \quad (n+1)(\delta_1+1)),\ (n=0,1,2,3,\cdots(c_1-1)); \\ (x-c_1\delta_1-c_1+1)+y_1+\delta_1, x\in[c_1\delta_1+c_1-1,s_2), \\ \qquad (s_2\text{满足}f(s_2)=y_2,y_2>y_1+\delta_1); \\ x-s_2-n(\delta_2+1)+y_2, x\in[s_2+n(\delta_2+1), \\ \quad s_2+(n+1)\delta_2+n),\quad (n=0,1,2,3,\cdots(c_2-1)); \\ -\delta_2(x-s_2-n-(n+1)\delta_2)+y_2+\delta_2, x\in[s_2+(n+1)\delta_2+n, \\ \quad s_2+(n+1)(\delta_2+1)),\ (n=0,1,2,3,\cdots(c_2-1)); \\ (x-s_2-c_2\delta_2-c_2+1)+y_2+\delta_2,\ x\in[s_2+c_2\delta_2+c_2 \\ \quad -1,s_3),\quad (s_3\text{满足}f(s_3)=y_3,y_3>y_2+\delta_2); \\ \quad\vdots \end{cases}$$

由于$0<\delta_i<1$,所以,$f(x)$的一切导出数$|Df(x)|<1$; 由第4题可知:$f(x)$满足李普西兹条件,所以$f(x)$是绝对连续函数。

现证 $G(x)=F(f(x))$不是绝对连续函数.

设 $[\alpha_i^j,\beta_i^j)=\Delta_i^j=[(\delta_i+1)\cdot j,(j+1)\delta_i+j)$

$j=0,1,2,\cdots(c_i-1)$。

$i=1,2,3,\cdots$

由$f(x)$定义知:$f(\alpha_i^j)=y_i,f(\beta_i^j)=y_i+\delta_i$。

$$G(\beta_i^j)-G(\alpha_i^j)=F(y_i+\delta_i)-F(y_i)。$$

$\{\Delta_i^j\}$是一组两两不相交的区间组。

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{c_i-1}m(\Delta_i^j)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\delta_i$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i+\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-1)\delta_i$$

由(2)知 $$<\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<+\infty。$$

所以,对任给的$\varepsilon>0$,存在m_0,当$m>m_0$时,

$$\sum_{i=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c_i-1}m(\Delta_i^j)<\varepsilon。$$

但 $$\sum_{i=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c_i-1}|G(\beta_i^j)-G(\alpha_i^j)|$$

$$=\sum_{i=m_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c_i-1}|F(y_i+\delta_i)-F(y_i)|$$

$$=\sum_{i=m_0}^{\infty}c_i(F(y_i+\delta_i)-F(y_i))$$

$$\geqslant \sum_{i=m_0}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cdot i$$

$$= +\infty$$

从而证明了 $G(x)$ 不是绝对连续函数. 这就与题设发生矛盾，所以，必有$F(x)$满足李普西兹条件.

6. 设$f(x)$是在$[a,b]$上定义的函数. 如果对于任一正数ε，常有这样的δ：当有限个区间$\{(a_k,b_k)\}$，其全长小于δ时，不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k)-f(a_k))\right|<\varepsilon$$

常成立，则$f(x)$必满足李普西兹条件.

证 由假设可知：对任给的$\varepsilon_0>0$，必有$\delta_0>0$，只要区间组$\{(a_k,b_k)\}$全长$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta_0$，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon_0.$$

对任一点 $x_0\in(a,b)$，必有n_0（正整数）存在，使得$x_0+\frac{\delta_0'}{n_0}<b$. 当$n>n_0$时，也有$x_0+\frac{\delta_0'}{n}<b$. 其中$0<\delta_0'<\delta_0$.

对任一$n>n_0$，构造区间组$\{(a_k,b_k)\}k=1,2,\cdots n$, $a_k=x_0$, $b_k=x_0+\frac{\delta_0'}{n}$, $k=1,2,\cdots n$. 于是：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k-a_k\right)=n\cdot\frac{\delta_0'}{n}=\delta_0'<\delta_0$$

故有 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(b_k)-f(a_k)\right|$

$$=\left|n\left(f\left(x_0+\frac{\delta_0'}{n}\right)-f(x_0)\right)\right|$$

$$<\varepsilon_0.$$

即有 $$\frac{\left|f\left(x_0+\frac{\delta_0'}{n}\right)-f(x_0)\right|}{\frac{\delta_0'}{n}}<\frac{\varepsilon_0}{\delta_0'}$$

对一切$n>n_0$都成立。

于是 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{\delta_0'}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{\delta_0'}{n}}\leqslant\frac{\varepsilon_0}{\delta_0'}.$$

即$f(x)$在x_0点至少有一个导出数$|Df(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{\delta_0'}$. 由于$x_0$是$(a,b)$中任一点，所以，对于$(a,b)$中任一点$f(x)$都至少有一个导出数小于$\frac{\varepsilon_0}{\delta_0'}$.

同时，由假设立即可知$f(x)$必为一个绝对连续函数. 由定理（绝对连续函数是它的导函数的不定积分）可知：

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(x)dx$$

而在$f'(x)$存在点，$f'(x)=Df(x)$.

所以 $|f'(x)|<\frac{\varepsilon_0}{\delta_0'}$.

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)0(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{\delta_0'}|x_2-x_1|.$$

所以　$f(x)$满足李普西兹条件。

〔注〕　这一结果表示绝对连续函数的定义中不能将$\{(a_k, b_k)\}$的两两不相交的条件去掉。

证法二　由假设条件知：取$\varepsilon_0=1$，存在$\delta_0>0$，使得对于$[a,b]$中的任意有限个区间(a_k,b_k) $k=1$，2，3，$\cdots n$。当$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta_0$时，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k)\cdot f(a_k)\}\right|<1.$$

任何$x_1,x_2\in[a,b]$，(不妨设$x_1<x_2$)。下面分两种情况证明。

(1) $x_2-x_1>\delta_0$时，可在$[x_1,x_2]$中加入N个等分点：

$$x_1=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_N=x_2$$

满足　$$\frac{\delta_0}{2}\leqslant\delta_1=\frac{x_2-x_1}{N}<\delta_0,\quad N\geqslant 2.$$

则对任一i　$(i=1,2,\cdots N)$

$$|f(c_i)-f(c_{i-1})|<1.$$

于是　$|f(x_2)-f(x_1)|$

$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{N}(f(c_i)-f(c_{i-1}))\right|$$

$$<N=\frac{1}{\delta_1}N\delta_1=\frac{1}{\delta_1}|x_2-x_1|$$

$$\leqslant\frac{2}{\delta_0}|x_2-x_1|$$

记$k=\frac{2}{\delta_0}$，δ_0取定后，它当然是常数。

从而 $|f(x_2)-f(x_1)|<k|x_2-x_1|$。

(2) 当$x_2-x_1<\delta_0$时，必有N(正整数)存在($N\geqslant 1$)，使得

$$\frac{\delta_0}{2}<\delta_1=N(x_2-x_1)<\delta_0$$

即 N个(x_2-x_1)小于δ_0，于是

$$N|f(x_2)-f(x_1)|$$

$$\leqslant 1.$$

于是 $|f(x_2)-f(x_1)|$

$$\leqslant\frac{1}{N}<\frac{2}{\delta_0}|x_2-x_1|$$

$$=K|x_2-x_1|.$$

综上可知，$f(x)$满足李普西兹条件。

7. 用直接的方法证明下述巴拿哈—查列兹基定理的特殊情形：如果连续的严格增加函数具有性质(N)则此函数是一绝对连续函数.

证 现取一正项数列$\delta_i\downarrow 0$，且$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i<+\infty$.对每一$\delta_i>0$，任取一两两不相交的区间组：$(a_1^i, b_1^i)$，$(a_2^i, b_2^i)\cdots(a_{n_i}^i, b_{n_i}^i)$。

$$\sum_{k=1}^{n_i}(b_k^i-a_k^i)<\delta_i$$

令 $E_i=\bigcup\limits_{k=1}^{n_i}(a_k^i, b_k^i)$，

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i.$$

从而 $$mA=\lim_{n\to\infty}m\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}mE_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}\delta_i$$

$$=0$$

$$f(A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}f(E_i)$$

由于$f(x)$具有性质(N)，所以

$$mf(A)=0$$

即 $$\lim_{n\to\infty}m\bigcup_{i=n}^{\infty}f(E_i)=0$$

所以 $$\lim_{i\to\infty}mf(E_i)=0$$

由于$f(x)$是严格单调增函数，E_i是由n_i个两两不相交的区间所组成．所以，

$$f(E_i)=\sum_{k=1}^{n_i}(f(b_k^i)-f(a_k^i))$$

即有 $$\lim_{i\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n_i}(f(b_k^i)-f(a_k^i)\right|=\lim_{i\to\infty}mf(E_i)=0.$$

对任给定的$\varepsilon>0$，必有i_0存在，当$i>i_0$时

$$\left|\sum_{k=1}^{n_i}(f(b_k^i)-f(a_k^i))\right|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\delta_{i_0}$

当任一两两不相交的区间组满足

$$\left|\sum_{k=1}^{n_i} b_k^i-a_k^i\right|<\delta \text{ 时}$$

就有 $$\left|\sum_{k=1}^{n_i}(f(b_k^i)-f(a_k^i))\right|<\varepsilon.$$

所以$f(x)$是绝对连续的。

8. 设$f(x)$在$[a, b]$上是连续的，而E是如下的这种点的全体：在E中各点$f(x)$至少有一个导出数不是正的。假如E之像不包含任何线节，则$f(x)$为增加函数。

证法一 用反证法。

若$f(x)$不是增加函数，则必存在两点x_1, x_2，不妨设$x_1<x_2$，使得$f(x_1)>f(x_2)$。下面中心是要证明$(f(x_2), f(x_1))\subset f(E)$，从而引出矛盾。

对任一$y_0\in(f(x_2), f(x_1))$，由于$f(x)$是连续函数，所以，至少有一点$x_0\in(x_1, x_2)$使得$f(x_0)=y_0$。为了证明$y_0\in f(E)$，分三种情况讨论。

(1) 在(x_1, x_2)中只有唯一点x_0，使得$f(x_0)=y_0$。且$f(x_2)<y_0<f(x_1)$。$f(x)-y_0$是(x_1, x_2)中连续函数，且只有一个零点x_0。所以，当$x\in(x_1, x_0)$时$f(x)-y_0>0$。因为$f(x_1)-y_0>0$，如$x\in(x_1, x_0)$，$f(x)-y_0\leqslant 0$，由函数连续性

知：在(x_1, x)间必有$x'_0<x<x_0$，使$f(x'_0)=y_0$。这与前面的假设矛盾。所以，对一切$x\in(x_1, x_0)$有

$$f(x)-y_0>0,$$

当$h_n\downarrow 0$，

$$\lim_{h_u\to 0^+}\frac{f(x_0-h_n)-f(x_0)}{-h_n}\leqslant 0$$

所以，x_0点至少有一个导出数不是正的。即

$$x_0\in E,\ y_0=f(x_0)\in f(E).$$

(2) 在(x_1, x_2)中，有有限个$\{x_0^i, i=1, 2, 3, \cdots n_i\}$使得 $f(x_0^i)=y_0$，因为只有有限个，无妨假设：

$$x_1<x_0^1<x_0^2<\cdots<x_0^{n_i}<x_2.$$

于是在 (x_1, x_0^1)之间不会再有 x 满足

$$f(x)=y_0.$$

仿照情况(1)的证明可知：$x_0^1\in E$，于是$y_0=f(x_0^1)\in f(E)$

(3) 当(x_1, x_2)中有无穷多个点$\{x_0^i\}$使得

$$f(x_0^i)=y_0.$$

但$x_1<x_0^i<x_2$，所以，必有于序列，$x_0^n\to x_0$，且$x_0\in[x_1, x_2]$。又由$f(x)$的连续性知：

$$\lim_{x_0^n\to x_0} f(x_0^n)=f(x_0).$$

但 $f(x_0^n)=y_0$，对一切n为自然数皆成立。

故 $f(x_0)=y_0$

从而 $$\lim_{x_0^n\to x_0}\frac{f(x_0^n)-f(x_0)}{x_0^n-x_0}=0.$$

即 $f(x)$在x_0有一个导出数不是正的。所以，

$x_0 \in E$，$y_0 = f(x_0) \in f(E)$。

综上所述，若 $f(x)$ 不是增加函数，必存在区间 $(f(x_2),$ $f(x_1)) \subset f(E)$，这就与$f(E)$不包含任何线节的假设相矛盾．故$f(x)$一定是增加函数。

证法二 若 $f(x)$ 不是增加函数，即存在 x_1，x_2，其中 $x_1 < x_2$，但$f(x_1) > f(x_2)$。

设 $f(x_1) > y_0 > f(x_2)$；即y_0是$(f(x_2), f(x_1))$中的任一点。

令 $\xi_0 = \sup\{x \mid f(x) \geqslant y_0\}$

(a) $f(\xi_0) = y_0$。

$f(\xi_0) \geqslant y_0$ 是显然的．但$f(\xi_0)$不会大于y_0，这是因为：若$f(\xi_0) > y_0$，则由 $f(x)$ 的连续可知，有 $x_0 \in (\xi_0, x_2)$ 使得 $f(x_0) = y_0$，$x_0 > \xi_0$。从而与ξ_0是 $\{x \mid f(x) \geqslant y_0\}$ 的上确界相矛盾．故$f(\xi_0)$只能等于y_0。

(b) 由于 $f(x_2) < y_0$，$f(x)$又是连续函数，则一定存在一个小邻域 $(x_2 - \delta_0, x_2)$，使得一切 $x \in (x_2 - \delta, x_2)$ 都有 $f(x) < y_0$。由此可知$\xi_0 < x_2$。显然$x \in (\xi_0, x_2)$必有$f(x) < y_0$。

$$\lim_{h_n \to 0^+} \frac{f(\xi_0 + h_n) - f(\xi_0)}{h_n} \leqslant 0$$

所以 $\xi_0 \in E$；$y_0 = f(\xi_0) \in f(E)$。

但对一切$y_0 \in (f(x_2), f(x_1))$均有上述结果，即

$$(f(x_2), f(x_1)) \subset f(E).$$

这与所设发生矛盾，故$f(x)$为一增加函数。

9. 如果$f(x)$在$[a, b]$上是连续的，几乎在$[a, b]$上每点，$f(x)$之一切导出数都不是负的，而$f(x)$至少有一个导出数取$-\infty$的点之全体至多是可列的，那末$f(x)$是一增加函数。

证 设 $E_0=\{x \mid f(x)$至少有一个导出数为$-\infty\}$

$E_1=\{x \mid f(x)$至少有一个导出数为负,且$x \in E_0$.$\}$

由假设知：E_0是可列集，$mE_1=0$，令 $E=E_1 \cup E_0$，则$mE=0$，由定理“设E是$[a, b]$中任一测度为零的集合，那末一定存在这样的连续增加函数$\sigma(x)$，使$\sigma'(x)=+\infty$在E上处处成立。”知：对任给定的$\varepsilon>0$，可构造函数：

$$G_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon(\sigma(x)+x),$$

$$DG_\varepsilon(x)=Df(x)+\varepsilon D\sigma(x)+\varepsilon.$$

当$x \in [a, b]-(E_0 \cup E_1)$ 时，$Df(x) \geqslant 0$，$D\sigma(x) \geqslant 0$，(因$\sigma(x)$是连续增加函数.)

从而 $DG_\varepsilon(x)>0$;

当$x \in E_1$ 时，由于$D\sigma(x)=+\infty$，$Df(x)$不会为$-\infty$，所以

$$DG_\varepsilon(x)=Df(x)+\varepsilon D\sigma(x)+\varepsilon>0,$$

令 $A=\{x \mid G_\varepsilon(x)$至少有一个导出数不是正的.$\}$

则有 $A \subset E_0$，而E_0至多为可列集，所以，A至多是可列集。于是$G_\varepsilon(A)$不会包含任何线节。根据第8题的结论知：

$G_\varepsilon(x)$是一增加函数。

当$y>x$时，$G_\varepsilon(y)>G_\varepsilon(x)$，即

$f(y)+\varepsilon(\sigma(y)+y)>f(x)+\varepsilon(\sigma(x)+x)$.

由于$\sigma(x)$是$[a,b]$上的连续增加函数,因此,它必有界.而上

述不等式对任意给定的 $\varepsilon>0$，皆成立，故当 $\varepsilon\to 0^+$时，上式取极限就有：$f(y)\geqslant f(x)$。

于是证出了$f(x)$是$[a, b]$上的增函数。

10. 设连续函数$f(x)$的导数处处存在，且$f'(x)$是可和的。假如$E(|f'|=+\infty)$至多是可列集，则$f(x)$为绝对连续函数。

证 设

$$g_n(x)=\begin{cases} f'(x) & f'(x)\leqslant n \\ n & f'(x)>n. \end{cases}$$

于是 $g_n(x)\leqslant f'(x)$，又由$f'(x)$可和，因此，$g_n(x)$ 也是可和的。

$$G_n(x)=f(x)-\int_a^x g_n(x)dx$$

由于$f(x)$处处可导，$\int_a^x g_n(x)\,dx$几乎处处可导且其导函数就是$g_n(x)$。所以就有：

$G_n'(x)=f'(x)-g_n(x)$ 几乎处处成立，而$g_n(x)\leqslant f'(x)$，故$G_n'(x)$几乎处处都不是负的。下面研究$DG_n(x)=-\infty$的点全体所组成的集。

对任一数列$h_n\downarrow 0$，$(n\to+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n}g_n(x)dx$$

$$\leqslant n.$$

也就是说 $D\int_a^x g_n(x)dx$ 恒小于n，因此，

$B_n=\{x\mid G_n(x)$至少有一个导出数为$-\infty$.$\}$

$\subset \{ x \mid |f'(x)| = +\infty \} = A$

由此可知，B_n 至多是一个可列集。由第九题可知：$G_n(x)$是一个增加函数。当 $x \in (a, b)$时，$G_n(x) \geqslant G_n(a)$。从而

$$f(x) - f(a) \geqslant \int_a^x g_n(x) dx.$$

而 $g_n(x) \uparrow f'(x) \in L[a, b]$。因此，由勒贝格控制收敛定理有：

$$f(x) - f(a) \geqslant \lim_{n \to \infty} \int_a^x g_n(x) dx = \int_a^x f'(x) dx.$$

令 $h_n(x) = \begin{cases} f'(x) & f'(x) > -n \\ -n & f'(x) \leqslant -n \end{cases}$

$H_n(x) = \int_a^x h_n(x) dx - f(x)$。

完全仿照上面证明方法可以得

$$f(x) - f(a) \leqslant \int_a^x f'(x) dx$$

从而就有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x) dx$$

对一切$x \in [a, b]$成立。

所以，$f(x)$是绝对连续函数。

11. 处处具有有限导数的函数具有性质(N)。

证 设$f(x)$在$[a, b]$上处处可微，且导函数有限，则要证明对任意$e \subset [a, b]$，若$me = 0$必有$mf(e) = 0$。

令 $e_n = e \cap \{ x \mid |f'(x)| < n \}$。

由于$f(x)$处处具有有限导数，所以，

$$e=\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n.$$

从而 $f(e)=\bigcup_{n=1}^{\infty} f(e_n)$.

e_n又可分解为

$$e_n=\{x \mid 0 \leqslant f'(x)<n\} \cup \{x \mid -n<f'(x) \leqslant 0\}$$
$$\triangleq e'_n \cup e''_n$$

于是 $f(e)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(f(e'_n) \cup f(e''_n)\right)$

欲证 $mf(e)=0$， 只需证明对每个自然数n有 $mf(e'_n)=mf(e''_n)=0$。

由于$me'_n=0$，所以，对任给定的$\varepsilon>0$，必有开集$G_n(\varepsilon) \supset e'_n$，且$mG_n(\varepsilon)<\varepsilon$。

为简单起见记 $G_n=G_n(\varepsilon)$。

对任给的$x \in e'_n \subset G_n$，由于$0 \leqslant f'(x)<n$，故存在$h_0>0$，当$0<|h|<h_0$ 时，

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<n+1,$$

即$(f(x)-(n+1)|h|)<f(x+h)<f(x)+(n+1)|h|$。 (•)

其中h_0可取得充分小，使得$(x-h_0,\ x+h_0) \subset G_n$。 对$h>0$，$h<h_0$作区间

$\Delta(x,\ h)=(f(x)-(n+1)h,\quad f(x)+(n+1)h)$ 及相应区间

$$d(x,\ h)=(x-h,\ x+h) \subset G_n.$$

由(•)知

$$f(d(x, h)) \subset (f(x)-(n+1)h, \quad f(x)+(n+1)h)$$
$$=\Delta(x, h).$$

显然 $\lim\limits_{h\to 0} m\Delta(x, h) = \lim\limits_{h\to 0} 2(n+1)h = 0$。

而且，当$\Delta(x_1, h_1)\cap\Delta(x_2, h_2)=\phi$时，

$$f(d(x_1, h_1))\cap f(d(x_2, h_2))=\phi.$$

从而

$$d(x_1, h_1)\cap d(x_2, h_2)=\phi.$$

由上述结果可见区间组 $\{\Delta(x, h)\}$ 依维他利意义覆盖了 $f(e'_n)$。而$f(e'_n)$为有界集。(因为在e'_n上$f'(x)$有界。)根据维他利定理，从$\{\Delta(x, h)\}$可选到可列个两两不相交的区间$\{\Delta(x_i, h_i)\}$，使得$m^*\left(f(e'_n)-\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta(x_i, h_i)\right)=0$。

所以，
$$m^*f(e'_n)\leqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta(x_i, h_i)\right)$$
$$+m^*\left(f(e'_n)-\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta(x_i, h_i)\right)$$
$$\leqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta(x_i, h_i)\right)$$
$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}(n+1)h_i$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}(n+1)md(x_i, h_i)$$

由 $\{\Delta(x_i, h_i)\}$ 两两不相交，所以，$\{d(x_i, h_i)\}$ 也是两两不相交的。

从而 $m^*f(e'_n)\leqslant(n+1)m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}d(x_i,h_i)\right)$。

又由于 $d(x_i, h_i)\subset G_n$，对一切i成立。

所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty}d(x_i, h_i)\subset G_n$。

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}d(x_i, h_i)\right)<\varepsilon.$$

从此可见 $m^*f(e'_n)<\varepsilon(n+1)$。

又由ε的任意性，立即得到

$$m^*f(e'_n)=0.$$

同理可证 $m^*f(e_n'')=0$。

于是 $m^*f(e)=0$。

所以，对任意$e\subset[a, b]$，若$me=0$，有$mf(e)=0$。即$f(x)$具有性质(N)。

12. 连续的严格增加函数$f(x)$为绝对连续的必要且充分的条件是：$f'(x)=+\infty$ 之点的全体 E 之像 $f(E)$ 成一测度为零的集。

证 必要性的证明：

由于绝对连续函数$f(x)$几乎处处存在有限导数$f'(x)$，从而易知 $mE=0$。又因为绝对连续函数具有性质(N)，所以，$mf(E)=0$。

充分性的证明：

先证 $f(x)$ 具有性质 (N)。即要证明对任意 $e\subset[a, b]$，若

$me=0$，则$mf(e)=0$。

设 $e_n=\{x\mid f(x)$至少有一个导出数小于$n\}\cap e$。

$$(n=1, 2, \cdots)$$

$$e_0=\{x\mid f'(x)=+\infty\}\cap e$$

$e_n\subset e$，故$me_n=0$。且

$$e=\bigcup_{n=0}^{\infty}e_n.$$

$$f(e)=\bigcup_{n=0}^{\infty}f(e_n).$$

由假设可知：$mf(e_0)=0$。

由定理（若$f(x)$是在$[a, b]$上所定义的严格增加函数，对于$E\subset[a, b]$中每一点x，至少有一个如下导出数$Df(x)\leqslant p$ $(0\leqslant p<+\infty)$，则$m^*f(E)\leqslant pm^*E$）知：对任一自然数n，有下述关系成立：$m^*f(e_n)\leqslant nm^*(e_n)=0$

所以 $mf(e_n)=0$。

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}mf(e_n)=0$

而 $0\leqslant mf(e)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}mf(e_n)=0$。

即 $mf(e)=0$。

所以，$f(x)$具有性质(N)。由定理（$f(x)$为连续有界变差函数且具有性质(N)，则$f(x)$是一绝对连续函数）知：$f(x)$是绝对连续函数（因$f(x)$是连续严格增加函数，所以$f(x)$为连续有界变差函数。）

13. 连续的严格增加函数$f(x)$之反函数成为绝对连续函数的必要且充分的条件是

$$mE(f'=0)=0.$$

证 必要性的证明：

由于严格增加的连续函数$f(x)$存在唯一的连续严格增加的反函数$f^{-1}(x)$。

令 $e=E(f'(x)=0)$，只要证 $me=0$。

而 $0\leqslant m^*f(e)\leqslant 0\cdot m^*(e)=0$

所以 $mf(e)=0$。

又由f^{-1}是绝对连续函数，

所以具有性质 (N)。

即有 $m(f^{-1}(f(e))=0$

也即 $me=0$。

充分性的证明：

由数学分析中定理可知：当$y_0=f(x_0)$时，此$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$在y_0的导数存在且等于：

$$(f^{-1}(y_0))'=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

所以 $E(f'(x)=0)=f^{-1}(E_y)$

$$E_y=\{y\mid(f^{-1}(y))'=+\infty\}$$

而 $0=mE(f'(x)=0)=mf^{-1}(E_y)$。

根据前一题的结论可知：$f^{-1}(y)$是一绝对连续函数。

14. 试举一例说明：$F(y)$，$g(x)$ 都是绝对连续函数，但

$F(g(x))$不是绝对连续函数.

解 设 $F(y)=y^{\frac{1}{3}}$, $y\in[-1, 1]$

$$g(x)=\begin{cases}x^{3}\cdot\cos^{3}\dfrac{\pi}{x} & x\in(0, 1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$F(g(x))=\begin{cases}x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x} & x\in(0, 1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$

由于 $x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}$在[0, 1]中全变差为$+\infty$, 所以它不是绝对连续的. 即$F(g(x))$不绝对连续.

但$F'(y)=\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$, 除$y=0$外处处存在, 故 $F'(y)$ 几乎处处存在.

当$-1<x<0$时,

$$\int_{-1}^{x}F'(y)dy=\frac{1}{3}\int_{-1}^{x}y^{-\frac{2}{3}}dy=x^{\frac{1}{3}}+1$$

$$=F(x)-F(-1)\ 0<x<1\text{时},$$

$$\int_{-1}^{x}F'(y)dy=\int_{-1}^{0}F'(y)dy+\int_{0}^{x}F'(y)dy$$

$$=-(-1)^{3}+x^{3}=x^{3}+1$$

$$=F(x)-F(-1)$$

所以 $F(x)=1+\displaystyle\int_{-1}^{x}F'(y)dy$

故 $F(y)$是y的绝对连续函数.

$$g(x)=\begin{cases} x^3\cos^3\dfrac{\pi}{x} & x\in(0,\ 1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0^+} x^2\cos^3\frac{\pi}{x}=0$$

$$g'(x)=3x^2\cdot\cos^3\frac{\pi}{x}+3x^3\cdot\sin^1\frac{\pi}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{x}$$

$$=3x^2\cdot\cos^3\frac{\pi}{x}+3x\sin^1\frac{\pi}{x}\cdot\cos^2\frac{\pi}{x}.$$

所以　$|g'(x)|\leqslant 6$

$g(x)$ 满足李普西兹条件，所以是绝对连续函数。

15. $f(x)$是$[a,\ b]$上绝对连续函数的充分且必要的条件是$\bigvee\limits_a^x(f)$是绝对连续函数。

证　必要性的证明：

由于$f(x)$是绝对连续函数，所以，它的全变差函数

$$\bigvee_a^x(f)=\int_a^x|f'(x)|dx.$$

于是，$\bigvee\limits_a^x(f)$是$|f'(x)|\in L[a,\ b]$的不定积分，必为绝对连续函数。

充分性的证明：

由$\bigvee\limits_a^x(f)$是绝对连续函数，对任给定的$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，

当两两不相交的区间组$\{(a_k, b_k)\}$的总长度$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\bigvee_a^{b_k}(f)-\bigvee_a^{a_k}(f)\right)\right|<\varepsilon,$$

即有 $$\left|\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{a_k}^{b_k}(f)\right|<\varepsilon.$$

但 $$|f(b_k)-f(a_k)|<\bigvee_{a_k}^{b_k}(f),$$

所以 $$\left|\sum_{k=1}^{n}f(b_k)-f(a_k)\right|\leqslant\sum|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

由此得知：$f(x)$是绝对连续函数。

16. 设$f(x)$为(A, B)上的凸函数，即对任意$x, y\in(A,B)$及$0\leqslant\lambda\leqslant1$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

则$f(x)$为(A, B)中任一闭子区间上的绝对连续函数。

证 只要证对任一区间$[a, b]\subset(A, B)$，$f(x)$在$[a, b]$上满足李普西兹条件。

首先证明在任一含于(A, B)的闭区间上，$f(x)$都是有界的。

设 $[a, b]\subset(A, B)$

令 $M=\max\{f(a), f(b)\}$,

对任一点 $z=\lambda a+(1-\lambda)b\in[a, b]$

$$f(z) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

$$\leqslant \lambda M + (1-\lambda) M = M.$$

所以，M是$f(x)$在$[a, b]$上的上界。

对任一 $z \in [a, b]$又可写成$\frac{a+b}{2} + t = z$。

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$$

于是 $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2} - t\right).$$

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$$

$$\geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m.$$

即对一切 $z \in [a, b]$

$$m < f(z) < M$$

从而证明了$f(x)$在(A, B)的任一闭子区间皆有界。

由$[a, b] \subset (A, B)$，必有$h_0 > 0$，使得$[a - h_0, b + h_0] \subset (A, B)$。由上可知$f(x)$在区间$[a - h_0, b + h_0]$上有下，上界$m'$及$M'$。

若x，$y \in [a, b]$的任意二个点。

令 $$z = y + \frac{h_0}{|y - x|}(y - x),$$

$$\lambda = \frac{|y - x|}{h_0 + |y - x|}.$$

则 $z\in[a-h_0,\ b+h_0]$。

$$y=\lambda z+(1-\lambda)x$$

$$f(y)\leqslant\lambda f(z)+(1-\lambda)f(x)$$

$$=\lambda(f(z)-f(x))+f(x)。$$

于是 $|f(y)-f(x)|\leqslant\lambda|f(z)-f(x)|\leqslant\lambda(M'-m')$

$$\leqslant\frac{|y-x|}{h_0}(M'-m')=K|y-x|。$$

其中 $K=\dfrac{M'-m}{h_0}$，与 x，y 选法无关。所以$f(x)$在$[a,\ b]$中满足李普西兹条件，必为$[a,\ b]$上的绝对连续函数。

17. 设$f(x)$在$[a,\ b]$上可测，则对任给的$\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在$[a,\ b]$上的绝对连续函数$\varphi(x)$，使得$mE\{|f-\varphi|\geqslant\delta\}<\varepsilon$。且若$|f(x)|\leqslant M$，则$|\varphi(x)|\leqslant M$。

证 因为$f(x)$在$[a,\ b]$上可测，由改进形式的波雷尔定理即可知：对任给定的$\varepsilon>0$，$\sigma>0$存在$[a,\ b]$上的多项式函数$p(x)$，使得 $mE\{|f(x)-p(x)|\geqslant\delta\}<\varepsilon$；且满足 $|p(x)|\leqslant\sup|f(x)|$ 若$|f(x)|<M$，$|p(x)|<M$。

因为$p(x)$是多项式函数．根据绝对连续函数运算性质及$y=x$是绝对连续函数，易知：$p(x)$是一绝对连续函数：取$\varphi(x)=p(x)$即可。

18. 设$f(x)\in L[a,\ b]$，则对任给定$\eta>0$，存在绝对连续函数$\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\eta。$$

证 根据第五章习题19知：对$\frac{\eta}{2}>0$必有$[a, b]$区间上的连续函数$g(x)$满足：

$$\int_b^a |f(x)-g(x)|dx<\frac{\eta}{2}$$

由于$g(x)$在$[a, b]$上连续，所以有界，$|g(x)|<M$。

令 $\delta=\frac{\eta}{2(b-a+2M)}$，由前题知：存在$[a, b]$上的绝对连续函数$\varphi(x)$满足

$$mE\{|g(x)-\varphi(x)|\geqslant\delta\}<\delta,\ 且|\varphi(x)|<M。$$

则有 $|g(x)-\varphi(x)|<2M$。

$$e=E\{|g(x)-\varphi(x)|\geqslant\delta\}。$$

再设 $$\int_a^b |g-\varphi|\ dx=\int_{[a,b]-e}|g-\varphi|\ dx+\int_e|g-\varphi|dx$$

$$\leqslant\delta(b-a)+2Mme$$

$$\leqslant\delta(b-a)+2M\cdot\frac{1}{b-a+2M}\cdot\frac{\eta}{2}$$

$$=\delta[b-a+2M]=\frac{\eta}{2}。$$

于是 $$\int_a^b |f-\varphi|dx\leqslant\int_a^b|f-g|dx+\int_a^b|g-\varphi|dx$$

$$\leqslant\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}=\eta$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实变函数论习题解答
作者＝国防科技大学应用数学教研室编
页数＝２８０
ＳＳ号＝１０８２３２６３
出版日期＝１９８０年１１月第１版

